ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 5 :: :: Heft 4 ::
August 1925 Seite 281 bis 360

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE:
LÁSZLÓ, Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation / RICHTER, Zur Berechnung der Luftröhrchenkühler / MELAN, Die Verteilung der Kraft in einem Streifen von endlicher Breite / BERGMANN, Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator / WAELSCH, Zweibein und Kreisel / ALT, Über die Totlagen des Gelenkvierecks

KURZE AUSZÜGE
Baumechanik

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 5 August 1925 Heft 4

Inhalt:

Seite
Hauptaufsätze. F. László: Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation 281
L. Richter: Zur Berechnung der Luftröhrchenkühler 293
E. Melan: Die Verteilung der Kraft in einem Streifen von endlicher Breite 314
St. Bergmann: Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator 319
E. Waelsch: Zweibein und Kreisel 331
H. Alt: Ueber die Totlagen des Gelenkvierecks 337
Kurze Auszüge. Baumechanik 346
Kleine Mitteilungen. Goldziher: Zur angewandten Kombinatorik 349
Buchbesprechungen. Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecker. — Lorenz: Die Anwendung der Gleichung der drei Momente (Clapeyronschen Gleichung) im Schiffbau. — Geusen: Die Eisenkonstruktionen. — Bleich: Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. — Schröder: Die kritischen Zustände zweiter Art raschumlaufender Wellen. — Lecher: Physik. — Haas: Atomtheorie in elementarer Darstellung. — Czuber: Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Matschoß: Männer der Technik. — Berliner und Scheel: Physikalisches Handwörterbuch. — Courant und Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. — Wagenblast: Wirkungen von Resonanzschwingungen in der Auspuffleitung von Vakuumpumpen. — Möller: Kraftarten und Bewegungsformen. — Wittenbauer: Aufgaben aus der Technischen Mechanik 350
Nachrichten 358

HAUPTAUFSÄTZE

Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation.[1]

Von F. LÁSZLÓ in Mülheim-Ruhr.

Der schnell angestiegene Kraftbedarf unserer Zeit hat zur vorzugsweisen Verwendung rotierender Großmaschinen geführt, denn diese haben sowohl in technischer als auch in wirtschaftlicher Hinsicht große Vorteile. Je weiter aber die Entwicklung fortschritt, desto größere Schwierigkeiten, meist festigkeits-technischer Art, stellten sich ihr entgegen. So fand man es z. B. mit Recht als sehr nachteilig, daß im Querschnitt eines rotierenden Umdrehungskörpers achsial gleicher Stärke, der eine kleine zentrale Bohrung besitzt, die Verteilung der Spannungen sehr ungleichmäßig ist. Die Beanspruchung der inneren Querschnittsfaser ist wesentlich größer als die der äußeren; da man aber einen Konstruktionskörper im Betriebe nur soweit belasten darf, daß seine größte Spannung mit gewisser Sicherheit unter der Streckgrenze des Materials bleibt, so müßten für einen günstigen Spannungsausgleich im Querschnitt dieser Scheiben, die in vielen Fällen unentbehrliche Konstruktionsteile sind, neue Mittel gesucht werden.

Eine ähnliche Aufgabe ist von dem österreichischen Artillerieoffizier Uchatius bereits vor einigen Jahrzehnten gelöst worden. Als nämlich seinerzeit an die Geschütze immer höhere Anforderungen gestellt wurden, traten bei der Verwendung von dickwandigen, bronzenen Rohren genau dieselben Schwierigkeiten auf. Die Spannungsverteilung in ihrem Querschnitt war derart ungleichmäßig, daß man den Gesamtquerschnitt nur in ziemlich geringem Maße ausnutzen konnte. Uchatius hat die Ausnutzung der Geschützrohre durch eine geistreiche technologische Maßnahme erhöht, indem er die Rohre mit einer kleineren Bohrung als dem endgültigen Kaliber anfertigte und nachher

[1]) Den vorliegenden Auszug der gleichnamigen, an der Techn. Hochschule Darmstadt genehmigten Dissertation des Verfassers (Referenten: Prof. Dr.-Ing. Blaess und Prof. Dr. Schlink) hat nach den Angaben und unter Aufsicht des Herrn Professor Dr. Schlink Herr cand.-Ing. Willy Prager angefertigt. Für die wohlwollende Unterstützung bzw. für die Bearbeitung möchte ich mich auch an dieser Stelle bestens bedanken. Die Arbeit wurde im Sommer 1922 abgeschlossen.

im kalten Zustande mit einem Stahldorn auf das gewünschte Maß aufweitete. Die inneren Querschnittfasern wurden dabei bleibend gedehnt, ihre Streckgrenze erhöht, gleichzeitig aber die äußeren Querschnittfasern elastisch vorgespannt, so daß beim Abfeuern eine ziemlich gleichmäßige, von innen nach außen nur etwas abflauende Spannungsverteilung entstand. Die Erfahrungen mit den Uchatiusschen Geschützrohren waren, dem damaligen Stand der Technik angemessen, als recht gut zu bezeichnen.

Dieses Beispiel stand vor Augen, als die Bestrebungen auftauchten, die Tragfähigkeit rotierender Scheiben durch Schleudern mit hohen Tourenzahlen, welche die bleibende Dehnung der inneren Querschnittfasern bewirken, zu erhöhen. Verschiedentlich wurden in den letzten Jahren ähnliche Versuche ausgeführt. Nach dem bisher Bekannten muß man wohl feststellen, daß diese noch keinen Abschluß des Problems erzielt haben. In erster Linie sind die Versuche der AEG[1]) zu erwähnen, die in vieler Hinsicht bemerkenswerte Ergebnisse gezeitigt haben.

Stodola[2]) bringt eine Festigkeitsrechnung für überschleuderte Scheiben[3]). Man findet in seinem Buch noch andere im Zusammenhang mit diesem Problem zu beachtende Mitteilungen.

Zu dem verwandten Problem der dickwandigen Rohre, welche durch hohe Innenpressung bleibend aufgeweitet werden, begegnet man seit Uchatius verschiedenen Versuchen, so z. B. denen von Krüger[4]), welche meines Wissens die letzten auf diesem Gebiete sind und außerdem einen umfangreichen Literaturnachweis enthalten.

Die Veröffentlichung von Lasche hat mich in erster Linie veranlaßt, das Problem der überschleuderten Umdrehungskörper mathematisch zu verfolgen.

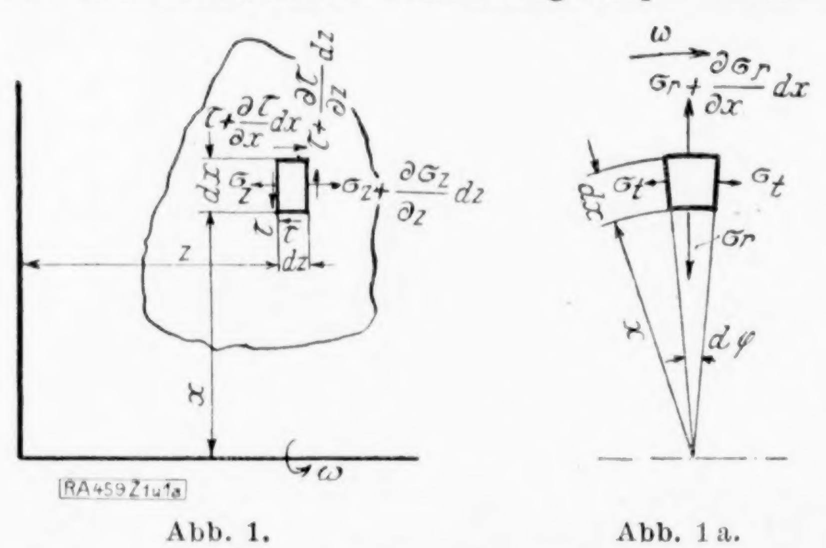


Abb. 1. Abb. 1a.

Spannungen eines geschleuderten Umdrehungskörpers.

1. Die tangentiale Querschnittsbelastung. Die Summe der tangentialen Spannungen im Querschnitte eines rotierenden Umdrehungskörpers soll als tangentiale Spannungskraft

$$T = \int_{(F)} \sigma_t \, dF \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

die sie hervorbringenden äußeren, in Umfangsrichtung gleichmäßig verteiletn Kräfte als tangentiale Querschnittsbelastung bezeichnet werden.

Betrachten wir ein Körperelement eines rotierenden Umdrehungskörpers (vergl. Abb. 1 und 1a), so können wir die Gleichgewichtsbedingung gegen radiale Verschiebung bekanntlich in der Gleichung:

$$\frac{\partial (\sigma_r x)}{\partial x} dx\,dz\,d\varphi + x\frac{\partial \tau}{\partial z} dx\,dz\,d\varphi - \sigma_t\,dx\,dz\,d\varphi + \mu\,\omega^2 x^2\,dx\,dz\,d\varphi = 0$$

ausdrücken, wobei μ die spezifische Masse des Materials und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen.

Integrieren wir obige Gleichung auf den ganzen Querschnitt F, so erhalten wir einen Ausdruck für die radiale Gleichgewichtsbedingung des $d\varphi$-Ausschnittes des Umdrehungskörpers. Diese lautet

$$d\varphi \iint_{(F)} \frac{\partial (\sigma_r x)}{\partial x} dx\,dz + d\varphi \iint_{(F)} x\frac{\partial \tau}{\partial z} dx\,dz - d\varphi \iint_{(F)} \sigma_t\,dx\,dz + \omega^2\,d\varphi \iint_{(F)} \mu\,x^2\,dx\,dz = 0.$$

Die beiden ersten Glieder verschwinden innerhalb der Querschnittsbegrenzung nach dem Wechselwirkungsgesetz und gehen an der Querschnitts-

[1]) O. Lasche: Konstruktion und Material im Bau von Dampfturbinen und Turbodynamos. J. Springer 1921, S. 13—21.

[2]) Stodola: Die Dampf- und Gasturbine. J. Springer, Berlin 1922, Seite 893.

[3]) Der Begriff des Schleuderns oder Ueberschleuderns soll künftighin auf das Gebiet bleibender Deformationen beschränkt werden.

[4]) Krüger: Untersuchungen über die Anstrengung dickwandiger Hohlzylinder unter Innendruck. Forschungsarbeit Heft 87, Kommissionsverlag J. Springer 1910.

begrenzung in die Summe der Radialkomponenten der auf den Ausschnitt $d\varphi$ wirkenden Randlasten über.

Dividieren wir die jetzt betrachtete Gleichung durch $d\varphi$ und vernachlässigen die Aenderung von μ infolge der Deformation, so erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\iint\limits_{(F)} \frac{\partial(\sigma_r x)}{\partial x}\, dx\, dz + \iint\limits_{(F)} x \frac{\partial \tau}{\partial z}\, dx\, dz + \mu\, \omega^2 \int\limits_{(F)} x^2\, dF = \int\limits_{(F)} \sigma_t\, dF \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Danach ist die tangentiale Querschnittsbelastung eines rotierenden Umdrehungskörpers gleich der Summe der bezogenen radialen Randbelastung und der bezogenen Zentrifugalkraft.

Hierbei ist unter bezogener radialer Randbelastung bzw. Zentrifugalkraft der Quotient aus der Summe der Radialkomponenten aller auf den Ausschnitt $d\,\varphi$ wirkenden Rand- bzw. Zentrifugalkräfte und dem Winkel $d\,\varphi$ verstanden.

Diese Gesetzmäßigkeit ist nur bei einem in der Umfangsrichtung gleichmäßigen Deformationszustand, aber bei beliebigem Spannungsdehnungsgesetz des Materials, also auch im Gebiete bleibender Deformation gültig.

2. Geschleuderte Ringe. Als einfacheren Fall wollen wir zuerst das Verhalten von solchen geschleuderten zylindrischen Körpern untersuchen, welche so geringe radiale Stärke haben, daß man die Verteilung der tangentialen Spannungen im ganzen Querschnitt als gleichmäßig betrachten und die radialen Spannungen vernachlässigen kann. Grundsätzlich müssen wir alle Kräfte und Spannungen auf die Abmessungen des deformierten Körpers beziehen, denn im Gebiet bleibender Deformation würde die in der Elastizitätstheorie hauptsächlich verwendete Rechnungsweise, mit Berücksichtigung der ursprünglichen Körperabmessungen, eine unzulässige Fehlerquelle bilden. Bei den gemachten Voraussetzungen können wir auch von der Form und Größe des Ringquerschnittes absehen und in jedem Augenblick nur eine im Schwerpunkt des ganzen Ringquerschnittes gedachte Querschnittseinheit betrachten. Zur weiteren Vereinfachung soll der frei geschleuderte, also mit Randkräften nicht belastete zylindrische Ring untersucht werden.

Mit Rücksicht darauf, daß wir jederzeit die deformierten Körperabmessungen berücksichtigen wollen, soll das Spannungsdehnungsgesetz des Materials auch auf die deformierten Querschnitte bezogen werden, also die sogenannten wahren Spannungen in Abhängigkeit der Dehnung betrachtet werden. Die Untersuchungen wollen wir vornehmlich auf zähe Materialien, wie Stahl, Eisen, Kupfer, Bronze usw. ausdehnen. Das Spannungsdehnungsgesetz dieser Materialien läßt sich im Gebiet bleibender Deformationen bekanntlich in der Form

$$\sigma^{\nu} = \zeta\, \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

ausdrücken, wobei σ, bzw. ε die wahre Spannung, bzw. die spezifische Dehnung, ν und ζ charakteristische Konstanten des betreffenden Materials bezeichnen, welche letztere sich an Hand von Zerreißversuchen bestimmen lassen. Gl. (3) erhält man am leichtesten zeichnerisch. In einem Zerreißdiagramm des Materials (Abb. 2, σ_a-Kurve) bedeuten nach entsprechender Bestimmung der Maßstäbe die Abszisse die spezifische Dehnung und die Ordinate die auf den ursprünglichen Querschnitt bezogene Spannung σ_a. Vernachlässigt man die Aenderung des spezifischen Gewichts infolge der Deformation, so besteht im Gebiet bleibender Deformationen zwischen den vorerwähnten und den wahren Spannungen die Beziehung $\sigma = \sigma_a (1 + \varepsilon)$. Wir erhalten also die Kurve der wahren Spannungen, indem wir die Ordinaten der σ_a-Kurve $(1 + \varepsilon)$ mal vergrößern. Dieses Verfahren führen wir nur bis zu dem horizontalen Ast der σ_a-Kurve durch, denn auf diesem beginnt die Einschnürung des Zugstabes, wo

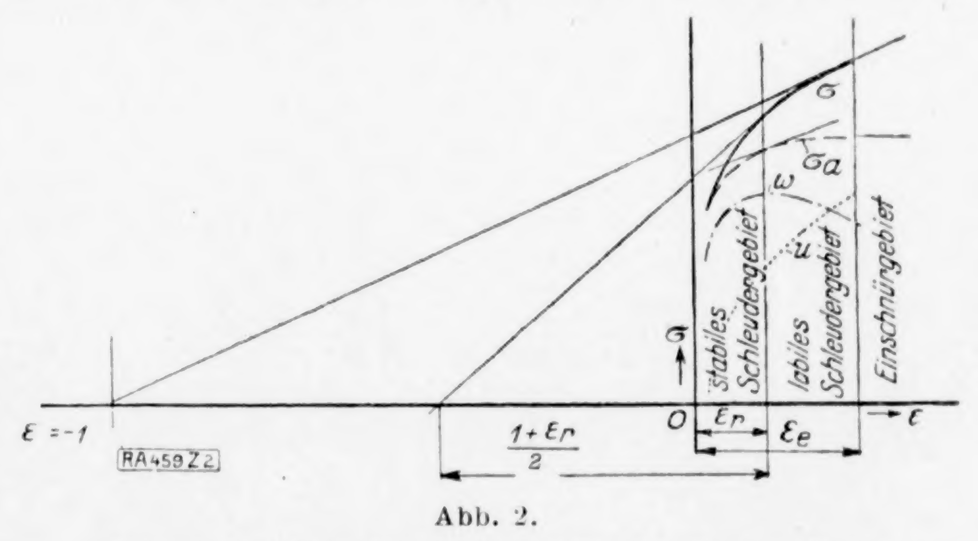


Abb. 2.
Rotierender Ring im Gebiet bleibender Deformation.

die verwendete Umrechnung mit Hilfe der gemessenen Längsdehnungen jede Berechtigung verliert. Auf der Kurve der wahren Spannungen können wir diesen sogenannten Einschnürpunkt bekanntlich derart bestimmen, daß wir die Kurve der wahren Spannungen in der normalen Weise zuerst über den zu erwartenden Einschnürpunkt hinaus konstruieren und nachher den Berührungspunkt einer aus dem Abszissenpunkt $\varepsilon = -1$ gezogener Tangente ermitteln (siehe Abb. 2).

Ein Ring wird also ohne Einwirkung von Randkräften mit einer so hohen Umfangsgeschwindigkeit geschleudert, daß seine tangentiale Spannung bzw. Dehnung die Streckgrenze des Materials überschreitet und der Ring in tangentialer Richtung bleibend gestreckt wird. Dadurch verfestigt sich das Material, und die Dehnung des Ringes kann nach einer gewissen Deformation bei gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit zum Stillstand kommen, wenn eben dieser Deformationszustand die Forderung der Gl. (2) befriedigt. Für den betrachteten Ringteil, welcher jederzeit den Querschnitt 1 und den gleichen Querschnittshalbmesser wie der ganze deformierte Ring besitzt (siehe Abb. 3 und 3a), können wir diese Gleichung folgendermaßen ausdrücken:

$$\sigma = \mu\,\omega^2\,r^2 = \mu\,\omega^2\,r_0^2\,(1+\varepsilon)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

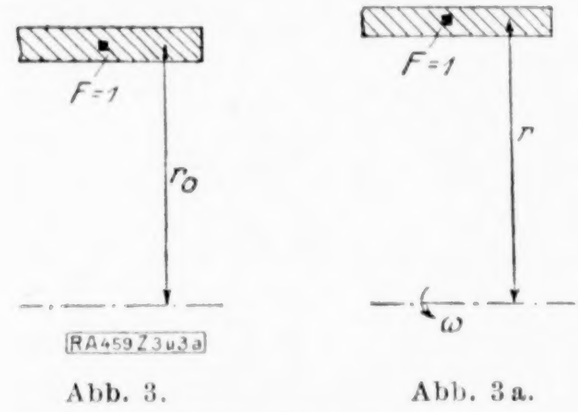


Abb. 3. Abb. 3a.
Geschleuderter Ring vor und nach der Streckung.

Hierin bedeuten σ die durchschnittliche tangentiale Spannung, ε die spezifische tangentiale Dehnung, r den vergrößerten, r_0 den ursprünglichen Schwerpunktshalbmesser des ganzen Ringquerschnittes.

Die Gl. (3) und (4) beschreiben also den Spannungs- bzw. Deformationsverlauf des geschleuderten Ringes.

Es ist von großer Bedeutung, ob der Ring in den berechneten Gleichgewichtszuständen stabil verbleibt oder aber in gewissen Fällen ohne Zunahme der Winkelgeschwindigkeit sich weiter deformieren kann. Setzen wir also voraus, daß der Ring bei einer Winkelgeschwindigkeit ω nach erfolgter Dehnung um ε sich zwar nach Gl. (3) und (4) in momentanem Gleichgewicht befinde, daß er aber trotz gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ($\omega = \text{const.}$) an seinem ganzen Umfange eine geringe weitere Dehnung um $d\varepsilon$ erleide. Dies würde sowohl die Festigkeit des Materials nach Gl. (3) von σ auf $\sigma + d\sigma$, wie auch die tangentiale Querschnittbelastung des Ringes von $\mu\,\omega^2\,r_0^2\,(1+\varepsilon)^2$ auf

$$\mu\,\omega^2\,r_0^2\,[(1+\varepsilon)+d\,\varepsilon]^2 \approx \mu\,\omega^2\,r^2\left(1+\frac{2\,d\,\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

vergrößern. Die zusätzliche Dehnung kann aber solange nicht zustandekommen, bis sie das Material mehr verfestigen, als die tangentiale Querschnittbelastung vergrößern würde, folglich bis die Bedingung $\sigma + d\,\sigma > \mu\,\omega^2\,r^2\left(1+\frac{2\,d\,\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$ oder bei Berücksichtigung der Gl. (4) $\frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon} > \frac{\sigma}{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ erfüllt ist. Diese Bedingung kennzeichnet also das stabile Schleudergebiet, in welchem eine weitere Deformation des geschleuderten Ringes nur durch Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit hervorgerufen werden kann.

Den Punkt, wo

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon} = \frac{\sigma}{\frac{1+\varepsilon}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

ist, wollen wir den kritischen Punkt frei geschleuderter Ringe (σ_r, ε_r, u_r) nennen. In zeichnerischer Darstellung ermittelt man das stabile Schleudergebiet an Hand der wahren Spannungsdehnungskurve (siehe Abb. 2), das vom Beginn der Deformation bis zu dem Punkt reicht, dessen Subtangente $\frac{1+\varepsilon}{2}$ beträgt. Dieser Punkt kann zeichnerisch durch probeweise Annahmen schnell bestimmt, außerdem seine Koordinaten aus Gl. (3) zu

$$\sigma_r = \left(\frac{\zeta}{2\,\nu-1}\right)^{\frac{1}{\nu}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{Gl. (6)} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_r = \frac{1}{2\,r-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6\,\text{a})$$

berechnet werden.

Mit Hilfe der Gl. (4) können wir nunmehr die zugehörigen Werte von ω und $u_r = \omega\, r_0\,(1 + \varepsilon_r)$ feststellen.

In den bisherigen Betrachtungen haben wir durch die Anwendung der Gl. (2) stillschweigend vorausgesetzt, daß die Deformation des Ringes in der Umfangsrichtung gleichmäßig ist. Es wäre daher zu untersuchen, ob und wieweit diese Gleichmäßigkeit besteht oder aber, wann eine lokale Deformation, eine Einschnürung an dem geschleuderten Ring infolge der Natur seiner Beanspruchung eintreten kann. Den Beginn der lokalen Deformation kann man derart charakterisieren, daß dabei eine sehr kurze Bogenlänge des Ringes x sich um $\varepsilon + d\,\varepsilon$ dehnt, solange der übrige Ring nur um ε gedehnt bleibt. Die zusätzliche Dehnung $d\,\varepsilon$ dieses kleinen Bogenstückes würde den Schwerpunktshalbmesser des ganzen Ringes, dadurch auch die tangentiale Querschnittsbelastung aller Ringquerschnitte vergrößern, gleichzeitig aber auch das Material des einschnürenden Bogenstückes, im Vergleich zu dem des sonstigen Ringes verfestigen. Sie kann daher nur in dem Falle entstehen, wenn die an der eingeschnürten Stelle auf $\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon+d\,\varepsilon}$ verkleinerte Querschnittseinheit trotz der durch die zusätzliche Deformation verursachten Verfestigung weniger tragfähig ist als die nur um ε gedehnte Querschnittseinheit des nicht eingeschnürten Ringstückes. Die frühere tangentiale Querschnittsbelastung $\sigma = \mu\,\omega^2\,r^2 = \mu\,\omega^2\,r_0^2\,(1+\varepsilon)^2$ wird durch die Einschnürung der Bogenlänge x auf

$$\mu\,\omega^2\,r_0^2\left[(1+\varepsilon) + \frac{x\,d\,\varepsilon}{2\,r\,\pi}\right]^2 \approx \sigma\left[1 + \frac{x\,d\,\varepsilon}{(1+\varepsilon)\,r\,\pi}\right]$$

vergrößert. Die Tragfähigkeit des eingeschnürten Ringstückes beträgt $(\sigma + d\sigma)\,\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon+d\,\varepsilon}$ $\approx (\sigma + d\sigma)\left(1 - \frac{d\,\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$. Die Einschnürung ist somit nur dann möglich, wenn die Beziehung

$$\sigma\left[1 + \frac{x\,d\,\varepsilon}{(1+\varepsilon)\,r\,\pi}\right] > (\sigma + d\,\sigma)\left(1 - \frac{d\,\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{x}{r\pi} > \frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon}\cdot\frac{1+\varepsilon}{\sigma} - 1$$

befriedigt ist. Diese Bedingung soll jedenfalls bei beliebig kleinen Werten von x bestehen, also muß sie für den Beginn der lokalen Deformation in die Grenzbedingung $\frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon}\cdot\frac{1+\varepsilon}{\sigma} - 1 = 0$ übergehen. Folglich kann der frei geschleuderte Ring nur an dem Punkte beginnend lokale Deformation erleiden, wo $\frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon} = \frac{\sigma}{1+\varepsilon}$ ist, also zuerst an demselben Punkt, wo auch der normale Zugstab sich einzuschnüren beginnt.

3. Die geschleuderten Umdrehungskörper. Zunächst untersuchen wir einen frei geschleuderten Umdrehungskörper zähen Materials. In diesem Falle lautet Gl. (2)

$$T = \int_{(F)} \sigma_t\,d\,F = \mu\,\omega^2 \int_{(F)} x^2\,d\,F.$$

Bezeichnen wir den momentanen Schwerpunktshalbmesser bzw. Trägheitsradius des Querschnitts mit r_s bzw. r_p, so geht obige Gleichung über in

$$T = \mu\,\omega^2\,F\,r_s^2 + \mu\,\omega^2\,F\,r_p^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Der jeweilige Wert der tangentialen Spannungskraft kann also als eine Funktion des jeweiligen (deformierten) Querschnitts

$$T = f\,(F) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

betrachtet werden. Es ist jedenfalls naheliegend, daß, wenn man die Gl. (8) analytisch bestimmen will, man sich zuerst einer anderen Veränderlichen wie ε oder dergl. bedienen muß, also Größen, die gewisse homogene spezifische Deformation kleiner Querschnittsteile bezeichnen. Die gewünschte Beziehung $T = f\,(F)$ wird nachher durch Integration auf den ganzen Querschnitt zu erhalten sein. Wir wollen uns in Erörterungen, ob und wie dieser Ausdruck analytisch zu erhalten wäre, nicht einlassen, sondern setzen voraus, daß entweder der analytische Ausdruck oder die graphische Darstellung (s. Abb. 4) bereits vorhanden ist. Im Ruhezustand soll der Umdrehungskörper den Querschnitt F_0 besitzen, welchem in Gl. (8) der Wert von $T = 0$ zugeordnet sein muß.

Führen wir ferner die Bezeichnungen

$$C' = \mu\,\omega^2\,F\,r_s^2 \quad \ldots\ldots \quad (9), \qquad C'' = \mu\,\omega^2\,F\,r_p^2 \quad \ldots\ldots \quad (9\,a)$$

ein. Zuerst wäre es zu versuchen, den Wert von T in Abhängigkeit von ω und F auszudrücken. Die übliche Voraussetzung, daß das Material inkompressibel, $\frac{d\mu}{dF} = 0$ ist, ergibt die Gleichung

$$\frac{r_{s1}}{r_{s2}} = \frac{F_2}{F_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

in welcher die Indexe 1 und 2 verschiedene zusammengehörige Werte von r_s und F bezeichnen. Aus Gl. (9) und (10) folgt unmittelbar

$$C' = \mu\,\omega^2 F_0\, r_{s_0}^{\,2} \frac{F}{F_0}\left(\frac{F_0}{F}\right)^2 = C_0' \frac{F_0}{F} \quad . \quad (11).$$

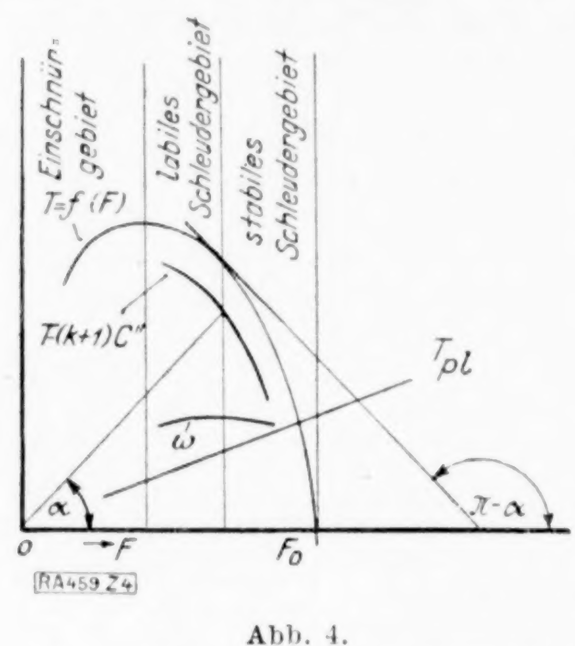


Abb. 4.
Rotierender Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation.

Der Index 0 bezeichnet Werte, die auf die ursprünglichen Abmessungen des Umdrehungskörpers bezogen sind. Somit hätten wir schon den einen Teil von T in Abhängigkeit von ω und F ausgedrückt. Versucht man es aber für den zweiten Teil C'', so stößt man wegen des Vorkommens des Trägheitshalbmessers r_p auf nicht geringe Schwierigkeiten. Der Trägheitsradius ist nicht nur von der jeweiligen Querschnittsgröße, sondern auch von der jeweiligen Querschnittsform abhängig. Kennt man also Größe und Form des Ausgangsquerschnittes, so kann der Wert von C'' für einen deformierten Querschnitt erst bei Kenntnis des Querschnittformverlaufs bestimmt werden. Dieser ist wohl, entweder auf Grund eingehender Festigkeits- und Deformationsberechnung oder mit Hilfe entsprechender Schleuderversuche, zu bestimmen. Man könnte aber noch versuchen, die mögliche Aenderung von C'' in Abhängigkeit von F durch die Bestimmung wahrscheinlicher unterer und oberer Grenzen zu berücksichtigen. Für diesen Zweck soll als symbolischer Fall eine Scheibe achsial gleicher Dicke Abb. 5 und 5a betrachtet werden. Abb. 5 stellt den Scheibenquerschnitt in Ausgangsabmessungen $r_{s0}, b_0, h_0, F_0 = b_0 h_0$, Abb. 5a den deformierten mit den Abmessungen $r_s, b, h, F = b\,h$ dar. Bei diesen symbolischen Betrachtungen nehmen wir ferner an, daß die Scheibe auch im deformierten Zustande von achsial gleicher Länge bleibt. Dann ist aber $C'' = \mu\,\omega^2 F \frac{h^2}{12}$. Es läßt sich ferner $C'' = \mu\,\omega^2 F_0 \frac{h_0^2}{12} \frac{F}{F_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 = C_0'' \frac{F}{F_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2$ schreiben. Bei Berücksichtigung der Gl. (10) ist

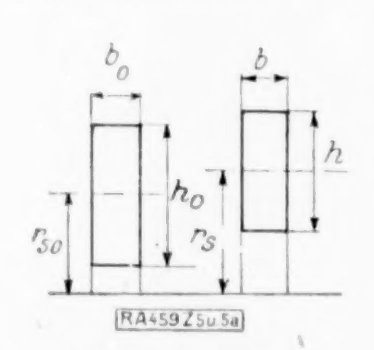


Abb. 5. Abb. 5a.
Geschleuderte Scheibe vor und nach der Verformung.

$$r_{s0}\, b_0\, h_0 = r_s\, b\, h \qquad \text{und} \qquad \frac{h}{h_0} = \frac{r_{s0}}{r_s}\frac{b_0}{b} = \frac{F}{F_0}\frac{b_0}{b}.$$

Als wahrscheinliche untere Grenze kann der Fall, wo die durch die Deformation bedingte Querschnittsverminderung bei unveränderter Breite, $b_0/b = 1$, vor sich geht und als obere die Querschnittsverminderung bei unveränderter Höhe, $b_0/b = F_0/F$, betrachtet werden. Daraus folgen

$$C_{\min}'' = C_0''\,(F/F_0)^3 \quad . \quad . \quad . \quad (12) \qquad \text{und} \qquad C_{\max}'' = C_0''\,F/F_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,a)$$

als untere resp. obere Grenze.

Um sich über die Größenordnung des prozentualen Grenzbereiches ungefähr ein Bild zu verschaffen, berechnen wir folgende Annahme:

$$F_0 = 210 \text{ cm}^2, \qquad h_0 = 70 \text{ cm}, \qquad r_{s_0} = 35 \text{ cm},$$
$$\gamma = 0{,}00785 \text{ kg/cm}^3, \qquad \omega = 314, \qquad F/F_0 = 0{,}9.$$

Daraus lassen sich $C_0' = 203\,000$ kg, $C_0'' = 67\,700$ kg, $C_0' + C_0'' = 270\,700$ kg bestimmen. Für den Wert von $T = C' + C''$ erhält man nach Gl. (11) und (12) als unteren Grenzwert 274 910 kg und nach Gl. (11) und (12a) als oberen Grenzwert 286 480 kg. Der Grenzbereich umfaßt also zirka $4^1/_4$ vH des unteren Wertes von T. Bei dem angenommenen Deformationsgrad von $F/F_0 = 0{,}9$ müssen wir diesen Grenzbereich als recht groß bezeichnen. Nähere Beschränkungen des Grenzbereiches werden sich wohl in ge-

gebenen Fällen auf Grund der für ähnliche Umdrehungskörper durchgeführten Deformationsberechnungen oder Schleuderversuche leicht erreichen lassen.

Wir wollen uns aber dieser Frage nicht weiter zuwenden, sondern die Gl. (11) und (12) in eine allgemeine Form zusammenfassen

$$T = C_0' F_0/F + C_0'' (F/F_0)^k \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

wobei der Wert von k wohl eine Funktion der jeweiligen Querschnittgröße sein dürfte, jedoch im Verlaufe der ganzen Deformation mit größter Wahrscheinlichkeit zwischen 1 und 3 liegen wird. Zusammengehörige Werte von T, F und ω können wohlbemerkt erst dann bestimmt werden, wenn sowohl Gl. (8) wie auch (13) in Abhängigkeit von F mathematisch oder graphisch dargestellt sind.

An Hand der Gl. (13) wollen wir den Labilitätspunkt für frei geschleuderte Umdrehungskörper bestimmen. Statt des für die Ringe angewandten Rechnungsganges soll diesmal derjenige benutzt werden, welcher die Bedingung $\frac{d\omega}{d\varepsilon} = 0$ bzw. bei Umdrehungskörpern $\frac{d\omega}{dF} = 0$, als Kennzeichen der Labilität unmittelbar berücksichtigt. Bildet man die Ableitung der Gl. (13) nach F und setzt darin $\frac{d\omega}{dF} = 0$ und $k =$ konst, so erhält man

$$\frac{dT}{dF} = - C_0' F_0/F^2 + k\, C_0'' \frac{F^{k-1}}{F_0^k} = - 1/F\,(C' - k\, C'')$$

oder

$$\frac{dT}{dF} = - 1/F\,[T - (k+1)\, C''] \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Dies ergibt einerseits die analytische, andererseits aber auch die graphische Ermittlung des Labilitätspunktes. Abgesehen davon, daß man denselben zeichnerisch aus dem Schnittpunkt der Kurven $\frac{dT}{dF}$ und $-1/F\,[T - (k+1)\, C'']$ erhalten kann, führt folgender Weg noch schneller zum Ziele. Man berechnet und zeichnet die Kurve von $T - (k+1)\, C''$ in Abhängigkeit von F auf. Nachher ermittelt man diejenige Abszisse F, bei welcher die zugehörige Tangente der T-Kurve und der (vom Koordinatenursprung gezogene) Leitstrahl der $T - (k+1)\, C''$ Kurve mit der positiven Richtung der Abszissenachse komplementäre Winkel bilden.

Es ist von Interesse, auch in dem Koordinatensystem T, F den Labilitätspunkt von frei geschleuderten Ringen aufzusuchen. Dieser ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{dT}{dF} = - T/F \quad \ldots \ldots \quad (15),$$

was soviel bedeutet, daß in dem betreffenden Kurvenpunkt die Subtangente gleich der Ordinate ist. Unsere Gl. (14) würde auch in dieselbe Form übergehen, wenn man C'' gegen C' vernachlässigen könnte. Dies ist selbstverständlich nie zulässig, weil die Vernachlässigung eben nur bei Ringen statthaft ist. Würde man trotzdem bei frei geschleuderten Umdrehungskörpern den Labilitätspunkt an Hand der Gl. (15) ermitteln, so ergibt sich dieser bei einem zu großen Wert von F. Das labile Schleudergebiet scheint also bei einer kleineren Deformation zu beginnen als dies bei der richtigen Bestimmung nach Gl. (14) der Fall ist. Eine Voraussetzung enthält natürlich die letzte Behauptung, diejenige nämlich, daß der Wert von k größer ist als -1. Dies wird aber in praktischen Fällen immer zutreffen. Wenn man also für frei geschleuderte Umdrehungskörper die Kurve $T = f(F)$ auf irgendwelche Weise graphisch erhalten hat, so kann als unterer Grenzwert des Labilitätspunktes derjenige nach Gl. (15) am schnellsten bestimmt werden.

Wie bereits für geschleuderte Ringe durchgeführt wurde, läßt sich für geschleuderte Umdrehungskörper mit ähnlichen Ueberlegungen beweisen, daß die Einschnürung des Umdrehungskörpers erst an dem Punkt beginnen kann, wo $\frac{dT}{dF} = 0$ ist, also wo die T-Kurve eine horizontale Tangente hat. Dieser Punkt der T-Kurve entspricht natürlich dem Einschnürpunkt des Zugversuches, nachdem die Kurve $T = f(F)$ mit derjenigen von σ_a wesensgleich ist.

Bei einem unter dem Einfluß von zentrifugalen Randkräften geschleuderten Umdrehungskörper tritt der Labilitätspunkt naturgemäß bei einer geringeren Deformation ein als bei einem frei geschleuderten. Dies gilt natürlich auch für Ringe. Die Verfolgung dieser Fälle, weil für jeden unschwer durchführbar, möge hier unterlassen werden.

4. Das labile Schleudergebiet: Im vorhergehenden wurde auf die Deformationsgeschwindigkeit keine Rücksicht genommen. Erfahrungsgemäß ist selbst ein Zerreißversuch von dieser ziemlich abhängig. Die Spannungsdehnungskurve der Abb. 2, soweit sie als zahlenmäßige Angabe betrachtet wird, ist eigentlich auf die bei Zerreißversuchen übliche Dehnungsgeschwindigkeit bezogen. Dieselbe dürfte bei unendlich langsamer Deformationsgeschwindigkeit noch etwas niedriger liegen. Geeignete Versuche haben aber nachgewiesen, daß die Wirkung der in der Materialprüfung üblichen Zerreißgeschwindigkeit für Stahl und Eisen so unbeträchtlich ist, daß man diese Kurven mit geringer Vernachlässigung als die Spannungsdehnungskurven der unendlich langsamen Deformation betrachten kann.

Betrachten wir im folgenden der Einfachheit halber einen frei geschleuderten zylindrischen Ring. Die Folgerungen können nachher sinngemäß auch für die anderen Schleuder körper verwendet werden. Der Ring erreiche mit sehr geringer Deformationsgeschwindigkeit bei der dem Scheitelpunkt der ω-Kurve entsprechenden Winkelgeschwindigkeit (Abb. 2) den Labilitätspunkt $\sigma_r = \mu\,\omega^2\,r_0{}^2\,(1+\varepsilon_r)^2$. Die früheren mathematischen Ueberlegungen haben den Beweis erbracht, daß, wenn die Winkelgeschwindigkeit unverändert bleibt, der Ring sich weiter deformiert — im Gegensatz zu dem stabilen Deformationsgebiet, wo dies eben nur durch Erhöhung der Tourenzahl ermöglicht ist. Im allgemeinen wollen wir die Winkelgeschwindigkeit auch als veränderlich in Rechnung ziehen und als Funktion der Zeit

$$\omega^2 = f_1(t) \qquad (16)$$

berücksichtigen. Die Deformation verläuft mit nicht vernachlässigbarer und veränderlicher Geschwindigkeit, d. h. man muß sie auch in Abhängigkeit von der Zeit, z. B. als

$$\varepsilon = f_2(t) \qquad (17)$$

betrachten. Will man weiterhin die Vorgänge rechnerisch verfolgen, so darf nicht außer acht gelassen werden, daß bei der Berücksichtigung der Spannungskraft des Ringes nicht die normale, aus dem Zerreißversuch berechnete Spannung σ, sondern die sogenannte dynamische Spannung σ_d in Betracht zu ziehen ist. Sie ist größer als die sonst betrachtete »statische« Spannung des Materials. Die bekannte Eigenschaft des Materials, bei zunehmenden Deformationsgeschwindigkeiten scheinbar höhere deformierende Kräfte zu bedingen, begründet das. Die dynamische Spannung ist nicht nur von der spezifischen Dehnung, sondern auch von der momentanen Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{d\varepsilon}{dt}$ abhängig,

$$\sigma_d = f_3\left(\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}\right) \qquad (18).$$

Die tangentiale Querschnittsbelastung erhält auch eine zusätzliche Kraft, welche — hervorgerufen durch die zentrifugale Beschleunigung des Ringes — der Zentrifugalkraft entgegenwirkt und für die Querschnitteinheit gleich

$$-\mu\,r\,\frac{d^2 r}{dt^2} = -\mu\,r_0{}^2\,(1+\varepsilon)\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

ist[1]. Die dynamische Gleichgewichtsbedingung frei geschleuderter Ringe ist folglich

$$\sigma_d = \mu\,\omega^2\,r_0{}^2\,(1+\varepsilon)^2 - \mu\,r_0{}^2\,(1+\varepsilon)\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

oder

$$f_3\left(\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \mu\,r_0{}^2\,(1+\varepsilon)^2 f_1(t) - \mu\,r_0{}^2\,(1+\varepsilon)\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \qquad (19).$$

Die Beziehung $\sigma_d = f_3\left(\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}\right)$ muß für das betreffende Material an Hand dynamischer Zerreißversuche ermittelt werden. Gl. (19) ermöglicht dann entweder für bestimmte Annahmen von $\varepsilon = f_2(t)$ die dadurch bedingte $\omega^2 = f_1(t)$ oder umgekehrt und schließlich beliebige zusammengehörige Werte von ε, ω und σ_d zu berechnen.

Versuche betreffs dynamischer Beanspruchungen sind öfters für verschiedene Materialien durchgeführt worden. Ludwik[2] führte Versuche mit Zinndrähten aus und stellte die Form der Geschwindigkeitskurve (Ordinate dynamische Spannung, Abszisse

[1] Voraussichtlich wird dieses Glied in praktischen Fällen nicht selten verhältnismäßig klein ausfallen, worauf wir aber hier keine Rücksicht nehmen wollen.

[2] P. Ludwik »Elemente der technologischen Mechanik«. J. Springer 1903, S. 44—53.

die effektive Streckgeschwindigkeit $\frac{d\eta}{dt}$, wobei $d\eta = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ist) bei gleichbleibender spezifischer Dehnung, $\varepsilon =$ konst., als logarithmische fest.

Plank[1]) führte dynamische Zerreißversuche mit Flußeisen aus. Zusammengehörige Werte von σ_d, ε, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ hätten an Hand seiner Messungen bestimmt werden können. Leider wurden diese Messungen für andere Gesichtspunkte ausgewertet und nur die Auswertung, nicht aber die aufgenommenen Diagramme veröffentlicht. Plank nimmt an, daß die dynamische Spannung im elastischen Deformationsgebiet unterhalb gewisser Deformationsgeschwindigkeiten proportional mit der letzteren verläuft, vermutet aber — womöglich auch mit Rücksicht auf die Ludwikschen Resultate —, daß diese Abhängigkeit im Gebiet bleibender Deformationen keinesfalls proportional sein kann. Vergegenwärtigt man sich, daß Zugstäbe desselben Materials mit verschiedener aber fallweise gleichbleibender Dehnungsgeschwindigkeit zerrissen werden, so wird man im allgemeinen verschiedene Spannungsdehnungskurven erhalten, welche bei gleichen Abszissen ε desto höhere Ordinaten σ_d besitzen, je größer ihre Deformationsgeschwindigkeit war. Als Nullkurve kann man mit gewisser Vernachlässigung auch die normale Spannungsdehnungskurve betrachten, welche demgemäß am tiefsten liegen wird. Ob und wieweit das Deformationsvermögen des Materials, also einerseits die gleichmäßige Dehnung, andererseits die Bruchdehnung von der Deformationsgeschwindigkeit beeinflußt wird, kann man allgemein nicht voraussagen. Es spielen Momente mit, die spezifische Eigenschaften des betreffenden Materials sind.

In Abb. 6 haben wir in diesem Sinne einige Spannungsdehnungskurven σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 entsprechend den wachsenden, aber sonst gleichbleibenden Dehnungsgeschwindigkeiten v_0, v_1, v_2, v_3, wobei $v = \frac{d\varepsilon}{dt}$ ist, außerdem für die Kurve v_0, σ_0 die zugehörige ω-Kurve eingetragen. Wenn der Ring den Labilitätspunkt mit der normalen äußerst kleinen Streckgeschwindigkeit v_0 erreicht hat und seine momentane Winkelgeschwindigkeit unverändert gehalten oder vergrößert oder sogar, wie wir es sehen werden, in geeigneter Weise laufend vermindert wird, so nimmt die Streckgeschwindigkeit nach Gl. (19) dauernd zu. Es fragt sich daher, ob und wie man die Streckgeschwindigkeit jederzeit am besten beherrschen kann.

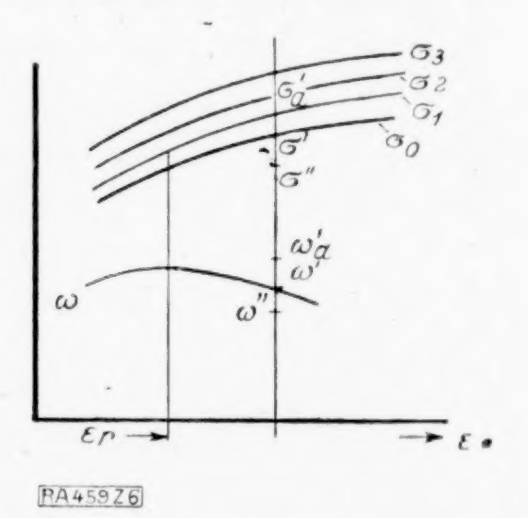


Abb. 6.
Rotierender Ring im labilen Schleudergebiet.

Nehmen wir an, der Ring habe im labilen Deformationsgebiet nach einem gewissen, unbekannten Deformationsverlauf bei einer Winkelgeschwindigkeit ω'_d, einer Deformationsgeschwindigkeit v' und einer dynamischen Spannung σ'_d die spezifische Dehnung ε' erreicht (siehe Abb. 6). Selbstverständlich sollen diese vier Werte die Gl. (19) befriedigen. Will man jetzt die Deformationsgeschwindigkeit beliebig verkleinern oder sogar vollständig vernichten, so ist dies am besten durch plötzliche Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit zu bewirken. Vermindert man die Winkelgeschwindigkeit beispielsweise von ω'_d auf ω'', so ergibt sich nach Gl. (3) und (4) eine negative tangentiale »Ueberschußkraft«, welche natürlich nur dahin auszulegen wäre, daß hierbei keine weitere Verformung ermöglicht ist. Der Deformationszustand ist nämlich durch die auf σ'' gesunkene Beanspruchung des Ringmaterials, dessen Streckgrenze vorangehend auf $\sigma' > \sigma''$ erhöht wurde, in einen elastischen überführt worden. Der Vorgang wird in Wirklichkeit doch ein anderer, weil die zentrifugale kinetische Energie des Ringmaterials durch die plötzliche Verkleinerung der Winkelgescchwindigkeit noch nicht vernichtet wurde. Deswegen ist das zweite Glied der rechten Seite der Gl. (19) mit positivem Vorzeichen in Rechnung zu stellen und die Deformationsgeschwindigkeit bzw. die dynamische Spannung wird hierdurch mit einer gewissen Verzögerung auf Null resp. auf σ'' sinken. Diese Verzögerung und die dadurch bedingte Vergrößerung von ε' dürfte wohl in praktischen Fällen vernachlässigt werden können. War unser Ziel nur die Verminderung der Streckgeschwindigkeit, so vergrößern wir nachher die Winkelgeschwindigkeit von ω'' auf ω'

[1]) R. Plank, »Betrachtungen über dynamische Zugbeanspruchungen«, Forschungsarb. Heft 133, J. Springer, 1913.

(siehe Abb. 6), wobei die Deformation mit von Null anwachsender Geschwindigkeit wieder einsetzen wird.

Wie wir also sehen, kann man durch zweckmäßige Aenderung der Winkelgeschwindigkeit, welche natürlich der Aenderung der tangentialen Querschnittsbelastung entspricht, die Deformationsgeschwindigkeit, damit aber das ganze labile Schleudergebiet, beherrschen. Diese Ueberlegung erklärt die Bedeutung der zu der Null-Deformationsgeschwindigkeit gehörenden Winkelgeschwindigkeitskurve im labilen Fließgebiet. Diese Kurve gibt diejenigen Werte von ω an, welche ein mit der zugehörigen Dehnung deformierter Ring unterschreiten muß, damit seine Verformung im labilen Schleudergebiet aufgehoben wird.

Es ist wohl ersichtlich, daß die geschilderten Vorgänge bzw. Ueberlegungen auch für beliebige Umdrehungskörper volle Gültigkeit behalten.

5. Das Einschnürgebiet. Im Einschnürgebiet des Schleuderns neigt ein Umdrehungskörper zur örtlichen Deformation. Der Vorgang spielt sich sonst mit den Eigenschaften des labilen Schleudergebietes ab.

Wenn man durch bleidende Deformationen in bestimmten Fällen technologische Vorteile zu erreichen trachtet, so bedeutet die Einschnürung auch in diesem Sinne das Unbrauchbarwerden des betreffenden Werkstückes. Ein Interesse, die Vorgänge der Schleuderdeformation im Einschnürgebiet zu untersuchen, hat nur der Gesichtspunkt, ob und wie man in diesem Gebiet eine in der Umfangsrichtung gleichmäßige Deformation bewerkstelligen kann. Möglichkeiten sind hierzu vorhanden. Man denke z. B., daß ein Ring auf einem vertikalen Kegel geschleudert wird, dessen Mantelfläche in Achsrichtung fein gerieft ist. Wenn das Ringmaterial ziemlich weich und zäh ist, so werden die Riefen schon beim Erreichen des Einschnürpunktes einigermaßen an der inneren Mantelfläche des Ringes abgedrückt sein. Man könnte aber dasselbe auch vor dem Schleudern durch Aufpressen des Ringes auf den Kegel bewirken, so daß die hierdurch vergrößerte tangentiale Flächenreibung dem Beginn örtlicher Deformation ein gewisses Hemmnis in den Weg setzt. Aehnliche, äußerlich wirkende mechanische Mittel könnten wohl verschiedenartig angewandt werden. Andererseits gibt es aber Materialien, bei welchen eine entsprechende Deformationsgeschwindigkeit den Verlauf des Zugversuches derart beeinflußt, daß der Probestab sich auch im sonstigen Einschnürungsgebiet auf seiner ganzen Länge gleichmäßig strecken läßt. Das sind bekanntlich Materialien, deren innerer Reibungswiderstand mit wachsender Streckgeschwindigkeit stark zunimmt und welche sich außerdem infolge Kaltdeformation in sehr geringem Maße oder gar nicht verfestigen.[1]) Diese Materialien, zu welchen vermutlich auch Stahl und Eisen bei gewissen Glühtemperaturen zuzurechnen sind, könnten also bei entsprechenden Deformationsgeschwindigkeiten auch im Einschnürgebiet des Schleuderns gleichmäßig deformiert werden.

Um den Schleudervorgang im Einschnürgebiet richtig erfassen zu können, soll vorangehend noch einiges über das Einschnürgebiet des normalen Zugversuches gesagt werden. Es soll daran erinnert werden, daß im Gegensatz zu der Abb. 4, wo wir den Verlauf der tangentialen Spannungskraft auch im Einschnürgebiet charakterisiert haben, in der Abb. 2 die Spannungsdehnungskurven nur für die stabilen und labilen Schleudergebiete, also bis zum Einschnürpunkt, eingetragen sind. Die Fortsetzung der Kurve wird üblicherweise derart bestimmt, daß man die momentane Zugkraft auf den eingeschnürten Querschnitt bezieht und die zugehörige spezifische Dehnung aus der gemessenen Kontraktion dieses Querschnittes berechnet. Dies läßt aber manche Bedenken aufkommen. Die Spannungsdehnungskurve des Zugversuches entspricht in ihrem Verlaufe bis zum Einschnürgebiet (die Wirkung der Einspannköpfe vernachlässigend) einem einachsigen Spannungszustand. Diese Eigenschaft verleiht ihr eben eine große Bedeutung und sollte den Verlauf der Kurve im Einschnürgebiet auch charakterisieren. Man bedenke aber, daß die von Außenkräften freie Mantelfläche des eingeschnürten Stabteiles kegelig begrenzt ist und demzufolge neben den achsparallelen Spannungskomponenten σ, solange der Querkontraktionskoeffizient des Materials nicht unendlich groß ist, auch beträchtliche radiale Komponenten σ_r auftreten müssen (siehe **Abb. 7**).

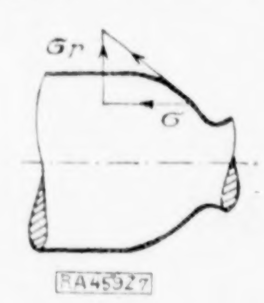


Abb. 7. Eingeschnürter Zerreißstab.

[1]) P. Ludwik »Elemente der technologischen Mechanik«. J. Springer 1903, S. 40.

Bei weichem Flußeisen ermittelt man zum Beispiel Werte von $\frac{\sigma_r}{\sigma}$ über 0,3. Dieses ruft aber in dem eingeschnürten Stabteil einen dreiachsigen Spannungszustand hervor, dessen Vernachlässigung kaum zulässig ist. Die radialen Spannungen bedingen in den Querschnitten eine wesentlich ungleichmäßige Verteilung der achsialen Spannungen. Weiterhin hat das Material in den einzelnen Ringstreifen der eingeschnürten Querschnitte verschiedene spezifische Dehnungen erlitten. So dürften die früheren Querschnitte, vom Bruchquerschnitt abgesehen, auch nicht eben geblieben sein und es muß mit beträchtlichen Schubspannungen gerechnet werden. Die aus der Kontraktion des Bruchquerschnittes bestimmte spezifische Dehnung ist auf den ganzen Bruchquerschnitt bezogen jedenfalls ein fiktiver Wert und kann in Wirklichkeit nur einem unbestimmten, äußerst schmalen Querschnittringstreifen zugeordnet sein, genau so die üblicherweise ermittelte wahre Bruchspannung. Ob diese beiden Werte demselben Ringstreifen zugeordnet sind, erscheint sogar im allgemeinen höchst unwahrscheinlich. Den diesbezüglichen metallographischen Ueberlegungen und ihren Folgerungen wollen wir keine Erwähnuug tun, dies fiele schon aus dem Rahmen dieser Arbeit. Solange für das Einschnürgebiet des Zugversuches die »statischen« und »dynamischen« Spannungsdehnungskurven für einen »einschnürungslosen« Deformationsverlauf nicht unzweifelhaft richtig ermittelt sind, kann die Schleuderdeformation im Einschnürgebiet auch für Ringe nur qualitativ verfolgt werden.

Den Fall des Schleuderns im Einschnürgebiet, in welchem die in der Umfangsrichtung gleichmäßige Deformation durch äußerlich wirkende mechanische Mittel bewirkt wird, brauchen wir nicht näher zu erörtern. Hierfür bleibt das für das labile Deformationsgebiet gesagte voll gültig. Anders sind die Verhältnisse, wenn man die tangentiale Gleichmäßigkeit der Deformation durch geeignete Deformationsgeschwindigkeit bewirken will. In diesem Falle gibt es im allgemeinen bei jedem Deformationsgrad eine kritische Deformationsgeschwindigkeit — diese kann durch geeignete Versuche ermittelt werden —, welche nicht unterschritten werden kann, ohne daß der Körper sich einzuschnüren beginnt. Die Deformationsgeschwindigkeit darf also nicht, wie im labilen Schleudergebiet, willkürlich vermindert werden, sondern, ihre untere Grenze sorgfältig berücksichtigend, muß ein Gebiet derselben als eine gewisse Gefahrzone, sowohl bei der Einleitung als auch bei der Unterbrechung der Deformation, möglichst schnell überschritten werden. Sonst gilt aber auch für diesen Fall alles für das labile Schleudergebiet ausgeführte.

Anschließend wollen wir auch dem in Abb. 4 charakterisierten Einschnür-Kurvenast der tangentialen Spannungskraft eine richtige Deutung geben. Dieser stellt diejenigen Werte der tangentialen Querschnittsbelastung dar, welche unterschritten werden müssen, damit der Deformationszustand des Umdrehungskörpers, welcher vorangehend bis zu dem betreffenden Querschnitt, beliebigerweise aber ohne Einschnürung deformiert wurde, in einen elastischen überführt wird, d. h. damit die Verformung aufgehoben wird. Mindestens müßten dieselben tangentialen Querschnittsbelastungen zwecks wiederholter Einleitung der Verformung angewendet werden.

Die gleiche Deutung hätte für Ringe im Einschnürgebiet die nicht eingezeichnete Fortsetzung der wahren Spannungskurve, welche, wie bereits gesagt, dem Verlauf eines imaginären, einschnürungslosen Zerreißversuches bei sehr geringer Streckgeschwindigkeit entsprechen müßte.

Einen wichtigen Umstand wollen wir noch an dieser Stelle betonen. In allen unseren Ueberlegungen betreffs der Schleuderdeformation im Einschnürgebiet sind gewisse Voraussetzungen mit enthalten, nämlich die, daß die Anwendung der für die Gleichmäßigkeit der Deformation entsprechenden Deformationsgeschwindigkeit tatsächlich möglich ist. Diese könnte unter Umständen daran scheitern, daß diese Deformationsgeschwindigkeiten einen vorzeitigen Bruch hervorrufen, der dieses Deformationsgebiet evtl. vollständig ausschließt oder erheblich beschränkt. Dies müßte natürlich fallweise für die einzelnen Materialien untersucht werden, ebenfalls die Möglichkeit, ob man das gefährliche Gebiet der Deformationsgeschwindigkeiten bei der Einleitung oder bei der Unterbrechung der Deformation so schnell durchlaufen kann, daß dabei praktisch noch keine Einschnürung auftritt.

6. Technologische Betrachtungen. Das Schleudern[1]) im Gebiet bleibender Deformationen könnte z. B. zum ausschließlichen Zwecke der Formgebung dienen.

[1]) Das Ueberpressen von Rohren (siehe Anm. 4 auf S. 282) verläuft bei ähnlichen Erscheinungen. Die math. Verfolgung wird jedoch der Kürze halber weggelassen. Die folgenden Ausführungen gelten natürlich auch für dieses eng verwandte Problem.

Hierfür kämen hauptsächlich ganz oder vorwiegend plastische Materialien in Betracht, bei welchen man in gewöhnlichem Sinne auch von einer Deformationsgrenze kaum sprechen kann.

Betrachten wir einen Ring rein plastischen Stoffes, welcher sich infolge bleibender Deformation nicht verfestigt. Der Verlauf seiner tangentialen Spannungskraft wird im F, T-Diagramm durch eine nach dem Koordinatenursprung gerichtete Gerade gekennzeichnet (T_{pl}-Linie in Abb. 4). Plastische Materialien neigen bekanntlich dazu, sich bei langsamer Zugbeanspruchung schon anfänglich einzuschnüren. Diese Eigenschaft ist auch in der T_{pl}-Linie ausgedrückt, indem das bekannte Kennzeichen des Deformationsverlaufes im Einschnürgebiet $\frac{dT}{dF} > 0$ von der T_{pl}-Linie mit einem unveränderlichen Wert befriedigt ist. Für plastische Materialien gilt daher sinngemäß das bereits für das Einschnürgebiet gesagte, wodurch auch die richtige Deutung der T_{pl}-Linie gegeben ist. In der Praxis spielt die Formung von Ringen oder sonstigen Umdrehungskörpern aus plastischen Materialien eine nicht unwesentliche Rolle. Man denke nur an ähnliche, warm geschmiedete, metallene Konstruktionsteile. Die früheren Ueberlegungen betreffs des Einschnürgebietes sind wohl hauptsächlich mit Rücksicht auf die Frage der Schleuderverformung plastischer Materialien erfolgt.

Zähe Materialien, welche sich bei Kaltdeformation verfestigen, durchlaufen im allgemeinen alle drei Schleudergebiete. Im Gegensatz zu dem rein plastischen muß man auch der zulässigen Deformationsgrenze dieser Materialien entsprechende Beachtung schenken. Jedenfalls soll es betont werden, daß, soweit beim Schleudern zäher Materialien ausschließlich die Formgebung in Betracht kommt, die Grenzen der Deformation durch wiederholtes Anlassen (Ausglühen) beliebig erweitert werden können.

Die Schleuderbearbeitung kommt andererseits zur Kalthärtung des Materials in Betracht. In dieser Beziehung ist sie nur für zähe Materialien und für solche besonders geeignet, deren Streckgrenze wesentlich nur durch Kaltreckung erhöht werden kann. Man denke nur z. B. an Kupfer und an die austenitischen Stahle. In diesem Falle tritt erst die Frage des zulässigen Verformungsgrades in den Vordergrund. Bekanntlich bildet die Bruchgefahr die äußerste Grenze jedweder Kaltbearbeitung, welche auch gleichzeitig mit dem Höchstwert der Verfestigung zusammenfällt. In der Praxis dürfte aber die Grenze der Schleuderbearbeitung kaum die unmittelbare Bruchgefahr bilden. Wenn auch diese mit der äußersten Erhöhung der Streckgrenze zusammenfällt, kommen doch für die Bewertung von Konstruktionskörpern außer der Tragfähigkeit noch viele andere Eigenschaften in Betracht, wie die Größe der Dehnung, der Kontraktion und der Kerbzähigkeit. Diese Eigenschaften des Materials sind in gewissem Sinne inverse Funktionen der Streckgrenze, also sie wachsen resp. vermindern sich auf Kosten resp. zu Nutzen derselben. Die Erhöhung der Tragfähigkeit muß also mit der praktisch zulässigen Verminderung der Zähigkeitseigenschaften fallweise richtig abgestimmt werden. Letztere gehen aber im Moment des Bruches bis auf Null zurück. Im Zusammenhang mit den Zähigkeitseigenschaften ist unter Umständen noch eine wichtige Erscheinung, das Altern, zu berücksichtigen. Dieses besteht bekanntlich darin, daß bei kalt deformierten zähen Materialien die bereits durch die Kaltreckung vergrößerte Streckgrenze, während einer darauf folgenden spannungsfreien Lagerung, auf Kosten des unmittelbar nach der Kaltreckung vorhandenen Zähigkeitseigenschaften sich langsam weiter erhöht. Diesbezüglich sei nur auf die Arbeit von F. Körber und A. Dreyer[1]) verwiesen, welche auch weiteren Literaturnachweis enthält. Das Altern bewirkt es, daß der Gültigkeitsbereich resp. der Zweck einer Festigkeits- und Deformationsberechnung für jegliche Art von Kaltbearbeitung auf die Dauer derselben resp. auf die Ermittlung des notwendigen Kraftbedarfes beschränkt werden kann. Die späteren Festigkeitseigenschaften des Materials, welche für seine betriebsmäßige Verwendung allein maßgebend sind, können dann fallweise nur durch entsprechende Alterungsversuche festgestellt werden.

Im Grunde genommen ist die Vorausberechnung eines Schleudervorganges unter Umständen ziemlich entbehrlich. Schleudert man z. B. einen Umdrehungskörper zähen Materials, so können die einzelnen Punkte der Gl. (7) im stabilen Gebiet leicht aus zusammengehörigen Meßwerten der Winkelgeschwindigkeit, der Querschnittgröße, der Querschnittform und Randkräfte berechnet bzw. bestimmt werden. Das labile Deformations-

[1]) F. Körber und A. Dreyer: Ueber Blaubrüchigkeit und Altern des Eisens. Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung, Bd. 1921, Stahleisen m. b. H., Düsseldorf.

gebiet wird durch die Zunahme der Deformationsgeschwindigkeit bei gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit zu beobachten sein. Mit den bekannten Mitteln wird man daselbst die Deformationsgeschwindigkeit regeln und die genannten Messungen bei wiederholtem Ab- und Anstellen der Deformation ausführend die Fortsetzung der Kurve im labilen Fließgebiet auch bestimmen können. Der Labilitätspunkt kann nachher, soweit man dafür ein besonderes Interesse hat, auf Grund der aufgenommenen Kurve genau ermittelt werden.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß in Fällen, wo das Schleudern zum Zwecke der Kalthärtung angewandt werden würde, die Berücksichtigung und Nutzanwendung der gleichzeitigen Deformation eine selbstverständliche Maßnahme wäre.

Ob und für welche Zwecke und bei welcher Art von Materialien das Schleudern bzw. Ueberpressen als Bearbeitungsmethode vorteilhaft angewendet werden kann, soll evtl. die Zukunft entscheiden. 459

Zur Berechnung der Luftröhrchenkühler.

Von L. RICHTER in Wien.

Die Kühlfähigkeit der im Automobil- und Flugzeugbau verwendeten Kühler mußte bisher für jede Bauart, ja selbst bei jeder Aenderung der Abmessungen und Luftgeschwindigkeiten durch Versuche bestimmt werden, da trotz wertvoller Untersuchungen [1]) eine verläßliche allgemeine Rechnungsmethode nicht bekannt war.

Hier soll nun gezeigt werden, wie durch Rechnung die nötigen Aufschlüsse über die Leistung aller Kühler zu gewinnen sind, »bei denen die Luft in einzelnen, ringsum geschlossenen Wegen den Block durchstreicht, gleichviel ob die Luft in wirklichen Röhrchen geführt wird oder nicht« [2]) und welche Form die Querschnitte der Röhrchen haben. Im ersten Teile werden die Grundlagen für die Berechnung der Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen und des Wärmeaustausches durch Strahlung und durch Leitung und Konvektion gegeben, sowie an Beispielen die Uebereinstimmung der Rechnung mit Versuchen gezeigt [3]), im zweiten wird zusammenhängend der Einfluß der Abmessungen und Betriebsbedingungen auf den Wärmeaustausch untersucht.

I. Grundlagen der Berechnung und Beispiele.

1. Die Luftgeschwindigkeit im Kühler. Der Kühler sei einem Luftstrome ausgesetzt, der in allen Punkten seines im Verhältnis zur Stirnfläche großen Querschnittes die gleiche und zu den Achsen der Luftröhrchen parallele Geschwindigkeit hat. Ob der Kühler im Verhältnis zur übrigen Umgebung ruht, wie bei Anblaseversuchen, oder sich in ruhender Luft bewegt, wie nach dem Einbau in Fahrzeuge, ist gleichgültig. Der Winkel zwischen der Stirnfläche und den Röhrchenachsen weiche wenig von einem rechten ab. Ist

F_{st} in m² die Stirnfläche,

F_e » » der gesamte freie Querschnitt des Lufteintrittes,

$F_1, F_2 \ldots F_n$ der gesamte freie Querschnitt der Luftwege im Inneren in verschiedenen Abständen von der Stirnfläche,

F_a der gesamte freie Querschnitt des Luftaustrittes,

so kennzeichnen die Verhältniszahlen

$$\varphi_e = F_e/F_{st}\,, \qquad \varphi_n = F_n/F_{st} \qquad \text{und} \qquad \varphi_a = F_a/F_{st}$$

die Luftdurchlässigkeit des Kühlers.

Der Kühler ist aus n gleichen Röhrchen von der Länge l in m (gleich der Blocktiefe) zusammengesetzt, deren Querschnitt der Größe und Form nach konstant oder veränderlich ist und durch die innere Querschnittsfläche f und ihren Umfang u, beziehungsweise den gleichwertigen Durchmesser

$$d = 4\,f/u \qquad \qquad (1)$$

---

[1]) Literaturangaben findet man bei Pülz, Kühlung und Kühler für Flugmotoren, Berlin 1920, Prätorius, Die Kühlung leichter Verbrennungsmotoren, Berlin 1921.

[2]) Pülz, a. a. O., S. 73. Nach dieser Definition sind auch die sogenannten Lamellenkühler in die folgende Untersuchung einbezogen.

[3]) Dieser Abschnitt bildet den wesentlichen Inhalt der von der Technischen Hochschule Dresden genehmigten Dissertation des Verfassers (Referenten Prof. Dr. Mollier und Prof. Dr. Trefftz).

gekennzeichnet ist. Dieser wird, wenn nichts anderes angegeben wird, in mm gemessen und ist für den Kreisquerschnitt gleich dem geometrischen Durchmesser, für den quadratischen Querschnitt gleich der Seitenlänge d.

Der freie Luftstrom vor dem Kühler hat die Relativgeschwindigkeit W_f, die Luft im Eintrittsquerschnitt die mittlere Relativgeschwindigkeit W_e, in den Querschnitten F_1, $F_2 \ldots F_n$ bzw. im Austrittsquerschnitt und hinter dem Kühler die relativen Geschwindigkeiten W_1, $W_2 \ldots W_n$, W_a und W_h alle in m/sek gemessen. Die Störung der Strömung durch den Ventilator, Motor und sonstige Einbauten vor oder hinter dem Kühler, die rechnungsmäßig kaum zu erfassen ist, wird nicht berücksichtigt, ebensowenig ein durch die Form des Einbaues erzeugter Unterdruck hinter dem Kühler.

Die Energie des Luftstromes vor dem Kühler geht teilweise bei Eintritt, Durchgang und Austritt verloren, teilweise ist sie in dem austretenden Luftstrom enthalten. Demnach gilt[1]) für 1 kg durchströmender Luft

$$\frac{W_f^2}{2g} = \zeta_e \frac{W_e^2}{2g} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i W_i^2 \frac{\Delta l}{d_i} + \zeta_a \frac{W_a^2}{2g} + \frac{W_h^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

ferner bestehen die Kontinuitätsgleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} W_e = (F_1/F_e)\, W_1 = (\varphi_1/\varphi_e)\cdot W_1\,, & W_a = (F_1/F_a)\, W_1 = (\varphi_1/\varphi_a)\cdot W_1 \\ W_1 = (F_n/F_1)\, W_n \ldots\ldots, & W_h = (F_1/F_{st})\, W_1 = \varphi_1 \cdot W_1 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3),$$

woraus sich

$$W_1 = \frac{W_f}{\sqrt{\zeta_e \frac{\varphi_1^2}{\varphi_e^2} + 2g \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\Delta l}{d_i} \left(\frac{F_1}{F_i}\right)^2 + \zeta_a \frac{\varphi_1^2}{\varphi_a^2} + \varphi_1^2}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und auch W_2, $W_3 \ldots\ldots W_n$ ergeben.

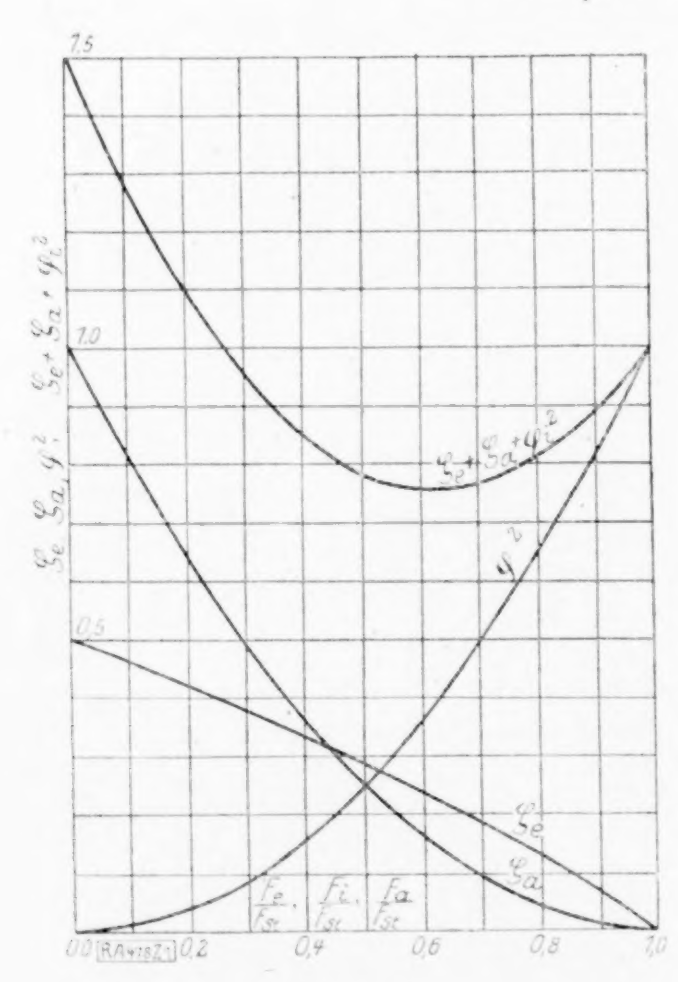


Abb. 1.

Für Röhrchen mit unveränderlichem Querschnitt ist

$$F_e = F_1 = \ldots\ldots = F_n = F_a = F,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots\ldots = \varphi_n = \varphi_e = \varphi_a = \varphi$$

und damit die Durchflußgeschwindigkeit

$$W = \frac{W_f}{\sqrt{\zeta_e + 2g\beta\, l/d + \zeta_a + \varphi^2}} \quad (4\,\mathrm{a}).$$

Die Beiwerte ζ_e und ζ_a für plötzliche zentrale Verengung und Erweiterung[2]) und φ^2 für die Energie der Luft hinter dem Kühler sowie die Summe $\zeta_e + \zeta_a + \varphi^2$ sind in Abb. 1 zusammengestellt.

Nach Fritzsche[3]) ist

$$\beta = 6{\cdot}02\, d^{-0{\cdot}269} (\gamma W)^{-0{\cdot}148} \quad . \quad (5),$$

worin γ den Mittelwert des spezifischen Gewichtes der Luft im Kühler in kg/m³ bedeutet. Dies und $g = 9{,}81$ in (4a) eingesetzt geben

$$W = \frac{W_f}{\sqrt{\zeta_e + \zeta_a + \varphi^2 + 118{\cdot}1\,(\gamma W)^{-0{\cdot}148}\, d^{-1{\cdot}269}\, l}} \quad (4\,\mathrm{b}).$$

Für γ kann ohne erheblichen Fehler das spezifische Gewicht der eintretenden Luft eingesetzt werden. Unter der Wurzel wird in

---

[1]) Angenähert, weil dabei vorausgesetzt wird, daß der statische Druck im freien Luftstrom vor und unmittelbar hinter dem Kühler gleich ist. Doch erweisen die späteren Beispiele die Zulässigkeit dieses Ansatzes.

[2]) Hütte I, 24. Aufl., S. 376, 380.

[3]) Hütte I, 24. Aufl., S. 536. Danach gilt für den Druckverlust in m Flüssigkeitssäule $h = \beta\, W^2\, l/d$ mit d in mm, l in m und W in m/s, während für glatte Rohre

$h = \lambda \frac{v^2}{2g}\, l/D$ mit D in cm, l in m, v in cm/s, g in cm/s² und

$\lambda = A \left(\frac{\nu}{v D}\right)^n$ mit der kinematischen Zähigkeit ν in cm²/s einzusetzen wäre.

erster Annäherung $W \sim W_f$ eingesetzt und damit W aus (4), (4a) oder (4b) berechnet; der erhaltene Wert wieder unter der Wurzel eingesetzt gibt W mit hinreichender Genauigkeit.

In Zahlentafel 1 sind nach fremden Versuchen [1]), die aus der Messung der Luftgeschwindigkeit hinter dem Kühler und der Kontinuitätsgleichung $W = W_h : \varphi$ erhaltenen Werte für die Geschwindigkeit W in den Kühlerröhrchen mit den aus (4) errechneten zusammengestellt und zeigen eine gute Uebereinstimmung mit den Versuchen. Die größere Abweichung in Reihe 19 (16 vH) dürfte auf den Uebergang von Wirbel- auf Laminarströmung, die in Reihe 22 (19,6 vH) auf einen Meßfehler zurückzuführen sein.

Die abgeleiteten Beziehungen gelten nämlich genau nur für Wirbelströmung. Abb. 3 zeigt für Luft von 1 at und 20° bei verschiedenen Röhrchendurchmessern die kritischen Geschwindigkeiten [2]), bei deren Unterschreiten Abweichungen von den Werten der Rechnung zu erwarten sind, obgleich die Wirbel der einströmenden Luft wegen der Kürze der Röhrchen noch nicht zur Ruhe kommen können. Die Durchströmgeschwindigkeiten bei Kühlern in Fahrzeugen dürften jedoch meist im Bereiche der Wirbelströmung liegen, so daß die aufgestellten Gleichungen ohne Bedenken benützt werden können.

2. Die Wärmeübertragung durch Strahlung. Wie der Anteil der Strahlung an der gesamten Wärmeübertragung seiner Größenordnung nach bestimmt werden kann, soll an dem Kühler Daimler V, 200 mm tief [3]), gezeigt werden, der auch weiterhin als Beispiel benutzt wird.

Von einem Flächenelement dF wird in der Zeiteinheit durch Strahlung die Wärme

$$d\,Q_{St} = c\left[(T_W/100)^4 - (T_0/100)^4\right] d\,F_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

übertragen, worin nach Nußelt [4])

$$1/c = 1/C_1 + (1/C_2 - 1/C)\frac{\Sigma F_1}{F_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

Bei gleichen Rohrmaßen und Druckverlusten ergäbe sich hieraus $\lambda = 0{,}01962\,\beta$.

Nach	Blasius	Ombeck	und	Fromm
ist	$A = 0{,}316$	0,242		0,399
	$n = 0{,}25$	0,224		0,27

Zum Vergleich der verschiedenen Formeln ist in Abb. 2 λ bzw. $0{,}01962\,\beta$ für ein Rohr von 6 mm Durchmesser bei einem Luftdruck von 735,5 mm Q.-S, 30° C, einem spezifischen Gewicht $\gamma = 1{,}130$ kg m^{-3} und einer kinematischen Zähigkeit $\nu = 0{,}165$ für Luftgeschwindigkeiten zwischen 2 und 50 m/s eingetragen. Allerdings liegen die Geschwindigkeiten unter 5 m/s schon unter der kritischen.

Das Bild zeigt, daß sich der Reibungsverlust nach der Formel von Fritzsche als der eines »wenig rauhen« Rohres kennzeichnen läßt, wobei besonders die Näherung an eine quadratische Abhängigkeit des Druckverlustes von der Geschwindigkeit charakteristisch ist, wie sie sich auch bei den Versuchen von Fromm (diese Zeitschr. 3, 1923, S. 339) ergab. Dies war auch neben der Handlichkeit der Formel und der guten Uebereinstimmung der mit ihr errechneten Werte für die Geschwindigkeit in den Röhrchen mit den Versuchen der Grund, warum sie trotz theoretischer Mängel (s. Fromm a. a. O., S. 343) beibehalten wurde, da sich ja außerdem die »Rauhigkeit« vorläufig noch nicht zahlenmäßig bestimmen läßt.

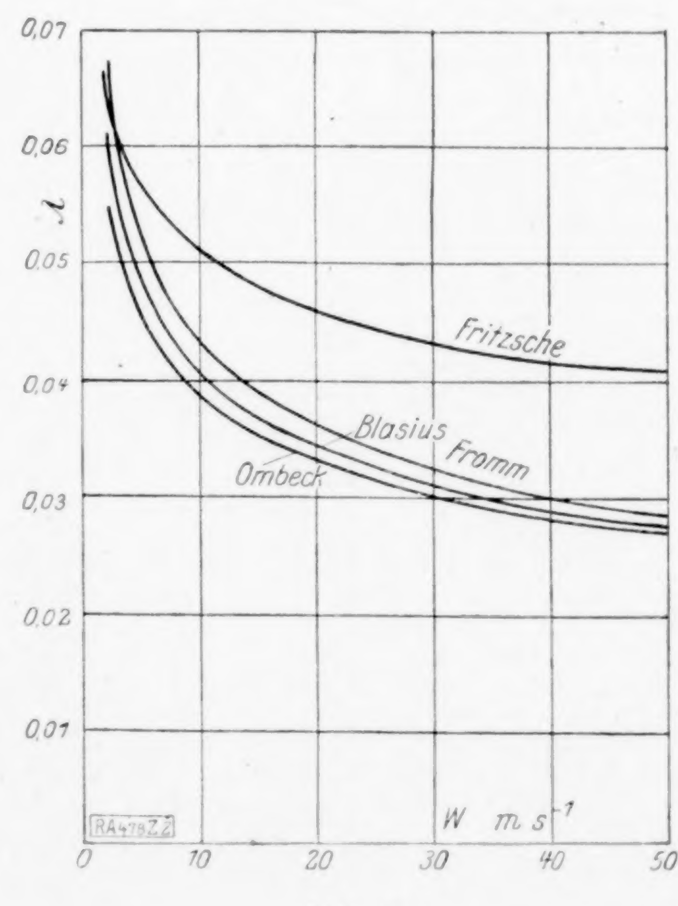


Abb. 2.

[1]) v. Doblhoff, Untersuchung von Automobilkühlern, Mitt. über Forschungsarb., Heft 93. — Bericht über Kühlerversuche des Motorenwerkes Wien (Abschrift durch Herrn Ing. Eugen Mandler freundlichst zur Verfügung gestellt).

[2]) Hütte I, 24. Aufl. S. 536.

[3]) Wiener Motorenwerk (Vgl. Pülz a. a. O., S. 44 u. Motorwagen XXIII/7. 10).

[4]) Nußelt, Der Wärmeübergang in der Gasmaschine, Mitt. über Forschungsarb. Heft 264, S. 7.

C_1 die Strahlungszahl des Wärme abgebenden Körpers,
C_2 » » der Umgebung,
$C = 4{,}70$ die » des absolut schwarzen Körpers,
ΣF_1 die strahlende, F_2 die bestrahlte Fläche,
T_W die von der Lage des Flächenelementes abhängige absolute Temperatur der Kühlerwand und
T_0 die absolute Temperatur der Umgebung ist.

T_W ist höchstens gleich der Temperatur des umlaufenden Wassers; für die Näherungsrechnung der von den Seiten-, Stirn- und Röhrcheninnenflächen ausgestrahlten Wärme werde unter Annahme einer linearen Temperaturabnahme in der Richtung der Wasserströmung

$$T_W = T_{WE} - \vartheta y \qquad (8)$$

gesetzt. T_{WE} ist die Wassereintrittstemperatur,

$$\vartheta = \frac{T_{WE} - T_{WA}}{h} \qquad (9)$$

das Temperaturgefälle, T_{WA} die Wasseraustrittstemperatur, h die Kühlerhöhe bzw. bei Kühlern mit nicht lotrechter Wasserströmung der Abstand zwischen Ein- und Austritt und y der lotrechte Abstand des betrachteten Flächenelementes vom Wassereintritt.

Setzt man (8) in (6) ein und integriert zwischen 0 und h, so erhält man für Kühler mit rechteckiger Stirnfläche und konstanter Tiefe die gesamte von Flächen mit variabler Temperatur durch Strahlung übertragene Wärme

$$Q_{St} = c/100^4\, \Sigma F_1 \left[T_{WE}^4 - 2\, T_{WE}^3\, h\, \vartheta + 2\, T_{WE}\, \vartheta_2\, h^2 - T_{WE}\, \vartheta^3\, h^3 + {}^1/_5\, \vartheta^4\, h^4 - T_0^4 \right] \qquad (10).$$

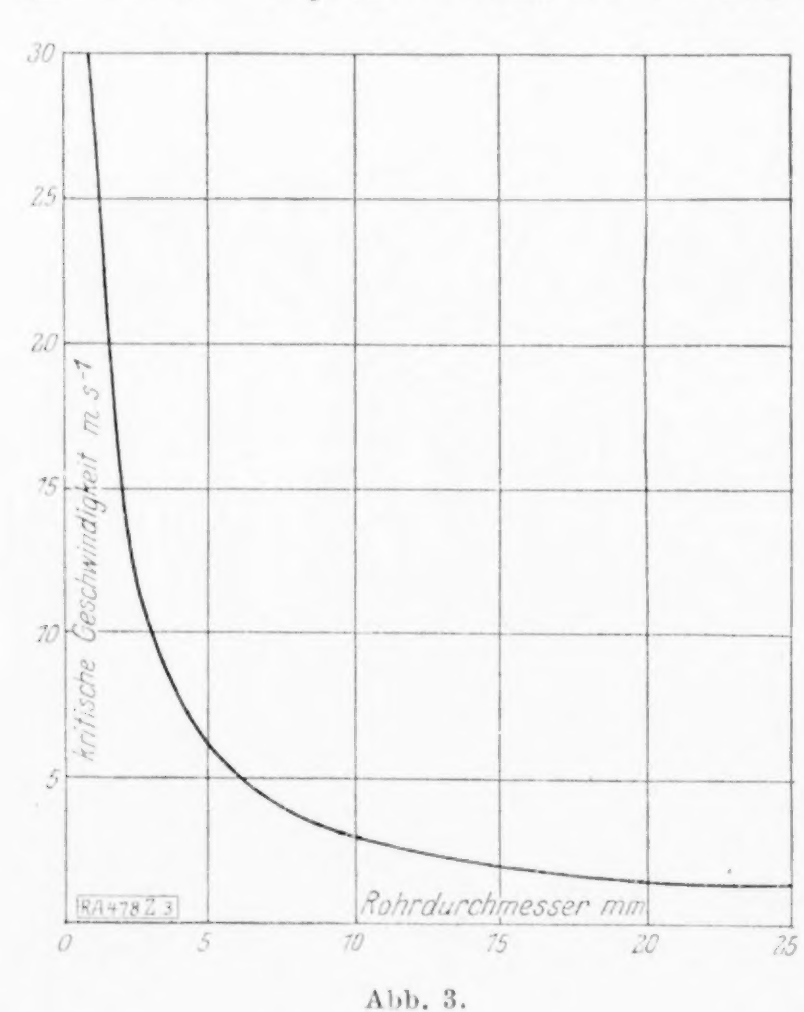


Abb. 3.

Denkt man sich als »Umgebung« des Kühlers eine verhältnismäßig große Kugel, in deren Mitte der Kühler steht, so wird jedem Teile seiner Außenfläche ein nahezu paralleler der Kugelfläche F_2 entsprechen. Dagegen ist die Strahlung der Röhrchen durch deren eigene Wände begrenzt.

Dem Flächenelement $df_1 = u\,dx$ (Abb. 4) entspricht nur ein voll strahlungsfähiges Element $df_{n1} = \sin \alpha\, df_1$, das durch einen Endquerschnitt auf ein paralleles Kugelelement strahlt und zwar so, daß der größte Winkel α durch den

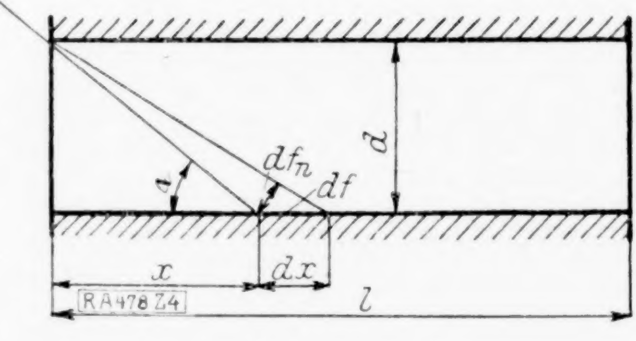


Abb. 4.

Abstand d des Flächenstückes von der gegenüberliegenden Fläche und die Entfernung x des Flächenelementes von der Stirnwand gegeben ist:

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2 + d^2}} \qquad (11).$$

Durch Integration über die Länge des Röhrchens, wobei der Wert entsprechend den zwei Oeffnungen des Röhrchens doppelt einzusetzen ist, ergibt sich als gleichwertige strahlende Fläche für den aus n-Röhrchen bestehenden Block

$$F_{n1} = n\, f_n = n\, u \operatorname{arctg} l/d \qquad (12).$$

Am Kübler »Daimler V, 200 mm tief« strahlt die obere Rahmenfläche von $0{,}485 \times 0{,}200 = 0{,}0970\ \mathrm{m}^2$ bei einer konstanten absoluten Wandtemperatur von $349{,}4^0$ nach (10) mit $C_1 = 1{,}5$, $C_2 = 4{,}70$ (die »Umgebung« als absolut schwarz angesehen) und bei einer Temperatur der »Umgebung« von 293^0 absolut $11{,}3\ \mathrm{kcal\,h^{-1}}$, die untere gleichgroße Rahmenfläche bei einer konstanten Temperatur von $337{,}9^0$ $8{,}3\ \mathrm{kcal\,h^{-1}}$ aus.

Die gleichwertige Röhrchenfläche wurde aus (12) mit $1{,}170\ \mathrm{m}^2$ bestimmt, die von ihr ausgestrahlte Wärme wie für die Seitenflächen von $2 \times 0{,}280 \times 0{,}200 = 0{,}112$ und für den strahlenden Anteil der Stirnflächen $2\ (1 - \varphi_e)\ F_{st} = 0{,}079$ aus (10) mit

$$h = 0{,}280\ \mathrm{m} \text{ und } \vartheta = \frac{349{,}4 - 337{,}9}{0{,}280} = 41$$

zu insgesamt $135{,}1\ \mathrm{kcal/st^{-1}}$ berechnet.

Die gesamte durch Strahlung abgegebene Wärme beträgt demnach

$$11{,}1 + 8{,}3 + 135{,}1 = 154{,}5\ \mathrm{kcal\,h^{-1}}.$$

Mit dem oberen Grenzwert $C_1 = 4{,}7$ wird die ausgestrahlte Wärme $478{,}5\ \mathrm{kcal/st^{-1}}$, das sind etwa 1,3 vH der durch Leitung und Konvektion übertragenen.

3. Die Wärmeübertragung durch Leitung und Konvektion. Die infolge Leitung und Konvektion zwischen Wasser und Luft durch die Wand ausgetauschte Wärme Q_N kann angenähert aus

$$\left.\begin{aligned} Q_N &= \frac{t_{WE} - t_{LE}}{\dfrac{1}{k\,F} + \dfrac{1}{2\,M} + \dfrac{1}{2\,m}} = K_N\, M\,(t_{WE} - t_{LE}) \\ \text{mit} \quad K_N &= \frac{\dfrac{k\,F}{M}}{1 + \dfrac{k\,F}{2\,M} + \dfrac{k\,F}{2\,m}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

gefunden werden, wenn die beiden Flüssigkeiten um Temperaturunterschiede erwärmt werden, die klein gegen den Unterschied der mittleren Temperaturen (Mittel aus Ein- und Austrittstemperatur) zu beiden Seiten der Trennungswand sind [1]).

Hier sind t_{WE} und t_{LE} die Eintrittstemperaturen des Wassers und der Luft in $^0\mathrm{C}$,
M und m die Wasserwerte der in der Zeiteinheit durchfließenden Luft und Wassermengen in $\mathrm{kcal\,h^{-1}\ {}^0C^{-1}}$,
F die Kühlfläche in m^2 und
k die Wärmedurchgangszahl in $\mathrm{kcal\,h^{-1}\ m^{-2}\ Grad^{-1}}$.

Bei großen Temperaturänderungen der Flüssigkeiten ist (13) durch die von **Nußelt** entwickelte Gleichung für den Wärmeübergang im Kreuzstrom zu ersetzen. Mit unseren früheren Bezeichnungen wird

$$Q_K = M\left(t_{WE} - t_{LE} - \frac{1}{l}\int_0^l t_{y=h}\, d\,x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

mit

$$t_{y=h} = (t_{WE} - t_{LE})\, e^{-\frac{k\,F}{M}} \left[1 + \int_0^{\frac{k^2\,F^2}{m\,M} X\,l} e^{-\frac{M}{k\,F} Z}\ \frac{-i\,J_1\,(2\,i\sqrt{Z})}{\sqrt{Z}}\, d\,z\right] \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

e ist die Basis der natürlichen Logarithmen, J_1 die Besselsche Funktion erster Art und erster Ordnung. (15) in (14) eingesetzt gibt

$$Q_K = M\,(t_{WE} - t_{LE})\left[1 - \frac{e}{l}^{-\frac{k\,F}{M}} \int_0^l \left(1 + \int_0^{\frac{k^2\,F^2}{M\,m} X/l} e^{-\frac{M}{k\,F} Z}\ \frac{-i\,J_1\,(2\,i\sqrt{Z})}{\sqrt{Z}}\, d\,z\right) d\,x\right] \quad . \quad (16).$$

---

[1]) Nußelt: Der Wärmeübergang im Kreuzstrom, Z. d. V. d. I. 1911 S. 2021. Für den Fall, daß nur die Lufttemperatur, nicht aber die Wassertemperatur in den Röhrchen in der Strömungsrichtung linear zu- bzw. abnimmt, gilt die Näherungsgleichung (35).

Zahlentafel 2.

Korrektionskoeffizient $q = \frac{K_K}{K_N}$ zur Berücksichtigung des Kreuzstromes.

kF/M	$KF/m =$	0,0	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0	15,0
0,0		1,0	0,984	0,948	0,865	0,695	0,600	0,567
0,2		0,997	0,986	0,960	0,903	—	—	—
0,5	$q =$	0,984	0,979	0,968	0,923	0,690	—	—
1,0		0,948	0,940	0,938	0,916	0,744	—	—
1,5		0,908	0,907	0,902	0,891	0,776	—	—
2,0		0,865	0,863	0,862	0,861	0,838	0,732	0,644

Aus Zahlentafel 2 sind für

$$0 \leq \frac{k\,F}{m} \leq 15 \quad \text{und} \quad 0 \leq \frac{k\,F}{M} \leq 2$$

die Werte der Verhältniszahl

$$q = \frac{Q_K}{Q_N} = \frac{K_K}{K_N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a)$$

zu entnehmen, so daß auch nach (14) die Zahlenrechnung einfach wird.

In der Wärmedurchgangszahl

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_L} + \frac{a\,F_L}{\lambda\,F_r} + \frac{1}{\alpha_W}\,\frac{F_L}{F_W}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

worin α_L und α_W die Wärmeübergangszahlen an die Wand für Luft und Wasser sind, F_L die luftberührte, F_W die wasserberührte und F_r eine reduzierte, durch die geometrische Form der Wand bedingte Kühlfläche bedeutet, ist a/λ (a die Wandstärke, λ die Wärmeleitzahl der Wand) unter den vorliegenden Verhältnissen gegenüber $1/\alpha_L$ und $1/\alpha_W$ sehr klein und kann vernachlässigt werden.

So ist z. B. für Eisen mit $\lambda = 60$ und bei einer Wandstärke der Kühlerröhrchen von 0,1 bis 0,3 mm

$a/\lambda = 0{,}00166 \times 10^{-3}$ bis $0{,}005 \times 10^{-3}$, während
$1/\alpha_L$ zwischen 1 und 6×10^{-3},
$1/\alpha_W$ » 2×10^{-3} und $0{,}5 \times 10^{-3}$ liegt.

In den Röhrchen ist nach Nußelt[1]) bei Wirbelströmung die mittlere Wärmeübergangszahl für Gase, bei der Durchflußgeschwindigkeit W

$$\alpha_{Lm} = 22{\cdot}60\;(\lambda_m/D)\;(D/l)^{0{\cdot}054} \left(\frac{D\,W\,\gamma_m\,C_{pm}}{\lambda_m}\right)^{0{\cdot}786} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

in kcal $m^{-2}\,h^{-1}\,{}^0C^{-1}$; darin ist der gleichwertige Durchmesser D in m einzustellen.

Zieht man die gleichen Glieder zusammen und setzt man die spezifische Wärme bei gleichbleibendem Drucke für 1 kg Luft zwischen -30^0 C und $+70^0$ C unveränderlich

$$C_{pm} = 0{,}240 \text{ kcal kg}^{-1}\,{}^0C^{-1},$$

wobei der Fehler ± 1 bis 2 vT beträgt, so wird

$$\alpha_{Lm} = 22{\cdot}23\;\lambda_m^{0{\cdot}214}\,d^{-0{\cdot}160}\,l^{-0{\cdot}054}\,(W\,\gamma_m)^{0{\cdot}786} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,a),$$

worin nunmehr d in mm einzusetzen ist.

Für die Wärmeleitzahl λ_m und das spezifische Gewicht γ_m wären die Werte bei dem Mittel aus Luft- und Wandtemperatur zu nehmen; es genügt aber für die erste Näherung, häufig auch für den endgültigen Wert, sie für die Temperatur $\frac{t_{LE} + t_{WF}}{2}$ einzusetzen.

Der Wärmeübergang an den Seitenflächen[2]) kann bei einem Luftdruck von 752 mm Q.-S., einer Wandtemperatur von 50^0 C und einer Lufttemperatur von 20^0 C aus

$$\alpha_L = 6{\cdot}14\;W_f^{0{\cdot}78} + 4{\cdot}60\;e^{0{\cdot}6\,W_f}\ \text{kcal}\,m^{-2}\,h^{-1}\,{}^0C^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

(W_f Luftgeschwindigkeit in $m\,s^{-1}$, e die Basis der natürlichen Logarithmen) berechnet werden. Für die vorliegende Rechnung kann die Veränderung dieser Wärmeübergangs-

[1]) Nußelt, Der Wärmeübergang im Rohr, Z. d. V. d. I. 1917, S. 686. Hütte 24. Aufl. I, S. 459.

[2]) Nußelt, Die Kühlung einer ebenen Wand durch einen Luftstrom, Gesundh. Ing. 1922, S. 641.

zahl mit der Temperatur vernachlässigt werden, da die entsprechenden Flächen verhältnismäßig klein sind.

Für den Wärmeübergang an den Stirnflächen der Kühler mit rechteckigen Röhrchenendquerschnitten soll das Gesetz für die Kühlung eines Zylinders durch einen senkrecht zur Achse strömenden Luftstrom [1]) verwendet werden.

$$\alpha_L = 0{\cdot}0670\,(\lambda_m/D)\left(1273 + \frac{D\,w_0\,\varrho_m}{\eta_m}\right)^{0{\cdot}716} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20).$$

Denn die Strömung um die Enden der dünnen Scheidewände zwischen den Luftwegen dürfte eine gewisse Aehnlichkeit mit der Strömung um Kreiszylinder haben, deren Durchmesser gleich der Stärke der Wände sind.

Fehler in der Wahl des α_L für die Seiten und Stirnflächen werden übrigens auf das Gesamtergebnis wenig Einfluß haben, da diese Flächen im Verhältnis zur Summe der Röhrcheninnenflächen klein sind.

In (20) ist D in m einzusetzen, die mittlere Dichte $\varrho_m = \gamma_m/9{\cdot}81$, ferner die Zähigkeit der Luft

$$\eta = \frac{2{,}41 \cdot 10^{-6}}{1 + \frac{117}{T}} \sqrt{\frac{T}{273}} \text{ kg s}^{-1}\,\text{m}^{-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21).$$

Mit Rücksicht auf die Unterschiede der Luftgeschwindigkeit vor und hinter dem Kühler empfiehlt es sich, zur Berechnung der Wärmeübergangszahl nach (20) die Geschwindigkeit W in den Röhrchen zu verwenden.

Aus den so berechneten Wärmeübergangszahlen α_L und den zugehörigen Flächen bildet man zweckmäßig vor dem Einsetzen in k den Mittelwert

$$\alpha_{Lm} = \frac{\Sigma\, F\alpha_m}{\Sigma\, F}.$$

Hierbei ist der Einfluß der nicht wasserberührten (mittelbaren) Kühlfläche zu berücksichtigen. Aus Abb. 5, einem Schnitt durch zusammenstoßende Röhrchen parallel zur Stirnfläche, ist zu ersehen, daß der Wärmeübergang auf den Fall einer Platte mit gleichförmigen Temperaturen t_W in den Endquerschnitten zurückgeführt werden kann. Für eine Plattendicke a, die klein gegen d ist, ergibt sich aus

$$\lambda\, a \frac{d^2 t}{d x^2} - 2\,\alpha\,(t - t_L) = 0 \qquad (22),$$

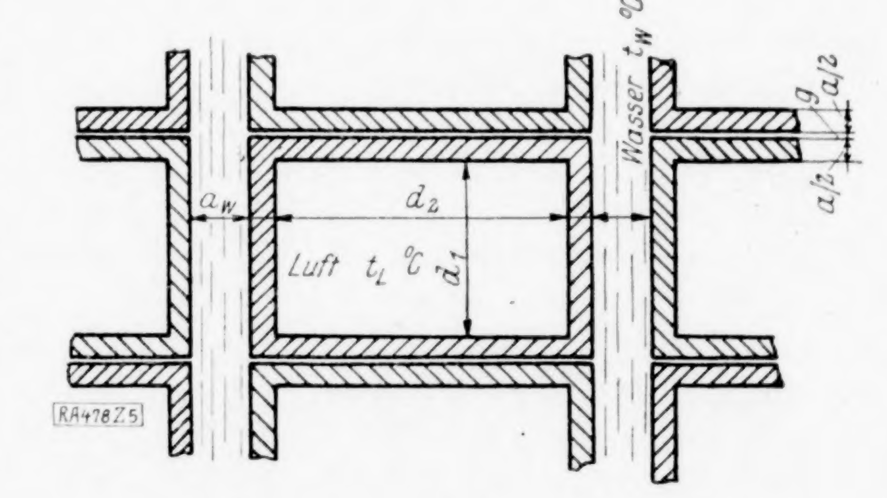


Abb. 5.

worin t die Temperatur im betrachteten Querschnitt, t_L die Lufttemperatur, x der Abstand von einer Wand, α_L die Wärmeübergangszahl und λ die Wärmeleitzahl bedeutet

$$\frac{t - t_L}{t_W - t_L} = \frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}\, d_2 \sqrt{\frac{2\,\alpha}{\lambda\, a}}} \left[\left(1 - e^{-d_2\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda a}}}\right) e^{x\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda a}}} - \left(1 - e^{d_2\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda a}}}\right) e^{-x\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda a}}}\right] \quad (23)$$

und für den Mittelwert der Wandtemperatur t_m

$$\left.\begin{aligned} \frac{t_m - t_L}{t_W - t_L} &= \frac{2\,(\mathfrak{Cof}\,\varphi - 1)}{\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\varphi} \\ \text{mit} \qquad \varphi &= d_2 \sqrt{\frac{2\,\alpha_L}{\lambda\, a}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24).$$

Der Wert $\vartheta = \frac{t_m - t_L}{t_W - t_L}$ kann als Reduktionsfaktor für die nicht wasserberührte Kühlfläche benutzt werden und ist der Abb. 6 zu entnehmen.

[1]) Nußelt, Die Kühlung eines Zylinders durch einen senkrecht zur Achse strömenden Luftstrom, Gesundh.-Ing 1922, S. 97.

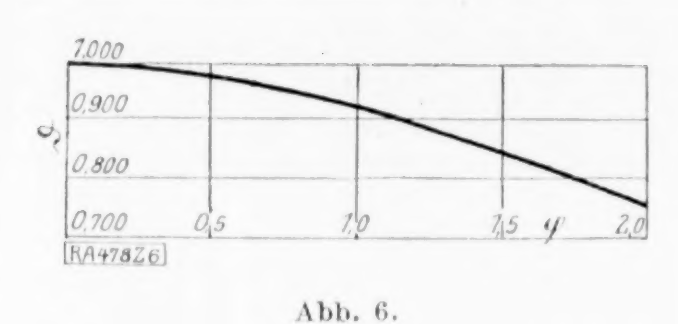


Abb. 6.

Die im Kühlerbau vorkommenden Seitenlängen der Röhrchen liegen zwischen 4 und 10 mm, die Wandstärken zwischen 0,1 und 0,3 mm, die Kühlwirkung der mittelbaren Kühlfläche steht bei Werten für $\alpha_L < 150$ und den angegebenen Seitenlängen derjenigen unmittelbaren (wasserberührten) nur wenig nach [1]).

Da Schiller durch Versuche [2]) über den Strömungswiderstand in Rohren zeigt, daß die Strömungsgesetze für kreisrunde Rohre nach Einführung des gleichwertigen Durchmessers $d = \frac{4f}{u}$ auch für rechteckige Rohre mit stark verschiedenen Seitenlängen sehr genau gelten und die Gesetze des Wärmeüberganges mit denen des Strömungswiderstandes innig zusammenhängen, wird es nicht allzu gewagt erscheinen, die Formel von Sonnecken [3]) für den Wärmeübergang von Wasser in kreisrunden rauhen Röhren

$$\alpha_W = 735 \frac{w^{0{,}7}}{D^{0{,}3}} (1 + 0{,}014\, t_i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

worin D der Rohrdurchmesser in m, w die mittlere Wassergeschwindigkeit in $\mathrm{m\,s^{-1}}$ und t_i die Wandtemperatur ist, auch auf den Wärmeübergang in Kühlern anzuwenden, wo die Wasserwege lange schmale Rechtecke von der Länge l und der Breite g sind. In diesem Falle ist $D = \frac{4\,l\,g}{2\,(l+g)}$ und für $l \gg g$

$$D \sim 2\,g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Bei Kühlern allerdings, deren Luftröhrchen allseits vom Wasser umgeben sind, läßt sich die Wärmeübergangszahl für Wasser gegenwärtig nur schätzen oder aus Versuchen, z. B. denen v. Doblhoffs, in folgender Weise bestimmen: Sind t_W und t_L die mittleren Wasser- und Lufttemperaturen beiderseits der Wand, deren mittlere Temperaturen auf der Wasser- und Luftseite t_1 und t_2 sind, so ist die übertragene, aus den Versuchen bekannte Wärme:

$$Q = \alpha_W F_W (t_W - t_1) = (\lambda/d)\, F_{\mathrm{red}}\, (t_1 - t_2) = \alpha_L F_L (t_2 - t_L) = k\, F_L (t_W - t_L) \quad (26).$$

In unseren Fällen ist λ/d immer sehr groß, $t_1 - t_2$ daher sehr klein, so daß $t_1 \sim t_2 = t$ gesetzt werden kann. Die luftberührte Wandfläche F_L ist angenähert gleich der Summe aus der wasserberührten F_W und der nicht wasserberührten F_N; mit berechnetem α_L wird

$$t = t_L + \frac{Q}{\alpha_L F}$$

und die gesuchte Wärmeübergangszahl für Wasser auf Röhrenbündel

$$\alpha_W = \frac{Q}{F_W \left(t_W - t_L - \dfrac{Q}{\alpha_L F_L}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

gefunden.

Für $F_W = F_L$ ist
$$\alpha_W = \frac{Q}{F_L (t_W - t_L) - Q/\alpha_L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,\mathrm{a}).$$

Für die Temperaturen t_W und t_L ist das arithmetische Mittel aus Ein- und Auslauftemperatur einzusetzen. α_W aus (27) wird in folgendem auch zum Vergleich mit dem aus (25) errechneten benutzt.

Der Wasserwert der durchströmenden Wassermenge ist gleich dem Gewicht G_W $\mathrm{mkgh^{-1}}$, der Wasserwert der durch die Röhrchen strömenden Luft

$$m' = G_L\, c_p = 3600 \cdot W_i\, F_i\, \gamma_m\, c_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

ist mit $\frac{n\,u\,l + 2\,(b+h)\,l\,(W_f/W)}{n\,u\,l}$ zu multiplizieren, um den Gesamtwert

$$m = 3600\, W_i\, F_i \frac{n\,u + 2\,(b+h)\,(W_f/W)}{n\,u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28\,\mathrm{a})$$

einschließlich des Anteiles der Mantelfläche zu erhalten.

[1]) Abweichend von Pölz a. a. O. S. 83.

[2]) Schiller, Ueber den Strömungswiderstand von Rohren, diese Zeitschr. 1923, S. 9.

[3]) Mitt. üb. Forschungsarb. Heft 108/109.

Für γ_m ist der Mittelwert für Ein- und Austritt einzusetzen oder näherungsweise vorerst der Wert bei der Eintrittstemperatur; nach erfolgter angenäherter Berechnung der gesamten übertragenen Wärme Q und damit der Austrittstemperatur ist γ_m und damit auch Q zu korrigieren.

4. Beispiele und Vergleich mit Versuchen. a) Daimler V, 200 mm tief.

Gegeben sind die Abmessungen des Kühlers (Zahlentafel 1),
die Geschwindigkeit der Luft vor dem Kühler $W_f = 38{,}6 \text{ m s}^{-1}$,
die Temperatur » » » » » $t_{LE} = 25{,}8^0$ C,
die durchfließende Wassermenge » » » $G = 4030 \text{ kg h}^{-1}$
die Wassereintrittstemperatur $t_{WE} = 76{,}43^0$ C und
das spezifische Gewicht der Luft vor dem Kühler $\gamma_1 = 1{,}16 \text{ kg m}^{-3}$.

Aus (4b) ergibt sich die Luftgeschwindigkeit im Kühler

$$W = 25{,}1 \text{ m s}^{-1}.$$

Die für den Wärmeübergang der Luft im Rohr maßgebende Temperatur wird angenähert $\frac{t_{LE} + t_{WE}}{2} = 51{\cdot}1^0$ C gesetzt und damit das entsprechende spezifische Gewicht

$$\gamma_m = 1{\cdot}16 \frac{273 + 25{\cdot}3}{273 + 51{\cdot}1} = 1{\cdot}07 \text{ und } \gamma_m W = 26{\cdot}9.$$

Mit $\lambda_m^{0{\cdot}214} = 0{\cdot}448$, $l^{-0{\cdot}054} = 1{\cdot}091$, $d^{-0{\cdot}160} = 0{\cdot}759$, $(\gamma_m W)^{0{\cdot}786} = 13{\cdot}26$ wird nach (18a) für die Innenflächen

$$\alpha_{L1} = 109{\cdot}5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} {}^0\text{C}^{-1}.$$

Die unmittelbar gekühlte luftberührte Innenfläche hat $6{,}82 \text{ m}^2$, die gleichgroße mittelbar gekühlte, multipliziert mit dem Reduktionsfaktor $\vartheta = 0{,}983$, für welchen $\alpha_L = 110$, $l = 100$, also $\alpha_L/\lambda = 1{,}1$ geschätzt werden, hat $6{,}71 \text{ m}^2$, zusammen $13{,}53 \text{ m}^2$. Für die Außenfläche von $0{,}307 \text{ m}^2$ bei $W_5 = 38{,}6$ wird $\alpha_{L2} = 105{,}5$. Für die beiden Stirnflächen mit 2 mm und 0,86 mm breiten Stegen von $0{,}0550 \text{ m}^2$ und $0{,}0238 \text{ m}^2$ Gesamtfläche ist $\alpha_{L3} = 310$ und 480 bei $W = 25{,}6$. Der Mittelwert für $\alpha_L = \frac{\Sigma \alpha_L F}{\Sigma F}$ wird $109{\cdot}9$. Das Wasser strömt in 64 rechteckigen Kammern von etwa $1{,}6 \times 195$ mm — also mit einem gleichwertigen Durchmesser $2 \times 1{,}6 = 3{,}2$ mm — in einem Gesamtquerschnitt von $2{,}00 \text{ dm}^3$ mit $0{,}056 \text{ m s}^{-1}$. Angenähert ist $t_i = \frac{\alpha_L t_{LE} + \alpha_W t_{WE}}{\alpha_L + \alpha_W}$, sodaß mit $\alpha_W = 1100$ annähernd $t_i = 71{,}5^0$ C.

Nun ist aus (25) $\alpha_W = 1120$. Der Wärmedurchgangswert wird nach (17) $k = 92{,}4$ und $kF = 1404$, ferner der Wasserwert des durchlaufenden Wassers $M = 4030 \text{ kcal h}^{-1} {}^0\text{C}^{-1}$. Für Luft ist nach (28a) mit $\gamma_m = 1{,}16$, $m = 2510$, $kF/M = 0{,}321$, $kF/m = 0{,}516$ und damit aus (13) angenähert $K_u = 0{,}226$ oder genauer für Kreuzstrom durch Multiplikation mit $q = 0{\cdot}99$, $K_q = 0{,}224$ und aus (16) die gesamte übertragene Wärme $Q_k = 45800 \text{ kcal h}^{-1}$, aus welcher die Luft- und Wasseraustrittstemperaturen

$$t_{LA} = t_{LE} + Q_k/m = 44{,}1^0 \text{ C und } t_{WA} = t_{WE} - Q_k/M = 65{,}0 \text{ folgen.}$$

Im allgemeinen dürfte diese Näherung genügen; genauere Werte lassen sich durch nochmalige Durchrechnung unter Benutzung der durch die Näherungsrechnung gewonnenen Zahlen in folgender Weise erzielen:

Die mittlere Lufttemperatur $t_{LM} = \frac{t_{LE} + t_{LA}}{2} = 35{,}0$,

» » Wassertemperatur $t_{WM} = \frac{t_{WE} + t_{WA}}{2} = 70{,}7$,

» » Wandtemperatur $t_i = 67{,}5$;

daraus die für die Berechnung der Wärmeübergangszahl für Luft im Rohr maßgebende Mitteltemperatur $\frac{35{,}0 + 67{,}5}{2} = 51{,}2^0$ C (oben näherungsweise 51,1), $\gamma_m = 1{,}07$ und $\alpha_L = 109{,}9$ (wie oben), $\alpha_W = 4120 \times 0{,}136 \times 1{,}946 = 1090$, $k = 92{\cdot}0$, $kF = 1292$ und $M = 4030$ (wie oben). Dagegen wird für die Luft im Rohr jetzt $\gamma_m = 1{,}125$ und damit $m = 2430$, $kF/M = 0{,}321$, $kF/m = 0{,}532$, $K_u = 0{,}225$, $K_k = 0{,}223$ und die gesamte übertragene

Zahlen

Zusammenstellung der Ver

Nr	1	2	3	4	5	6
1	V	Quelle	—	Berichte über Kühler werkes		
2	V	Versuchsnummer der Quelle	—	7	7	7
3	V	Herkunft und Type des Kühlers	—	Daimler V. 200 mm tief		
4	V	Außenmaße des Kühlers $h \times b \times l$	mm	$280 \times 485 \times 200$		
5	V	Stirnfläche » » $b \times h$	m^2	0,1358		
6	V	Zahl, Querschnitt und Tiefe der Röhrchen	mm	$3015 \times 5{,}65 \times 5{,}65$ □ $\times 200$		
7	V	Wandstärke	mm	0,17		
8	R	Gleichwertiger Durchmesser d	mm	5,65		
9	V	Gesamter freier Querschnitt des Lufteintrittes F_e	m^2	0,0965		
10	V	» » » der Luftwege innen F_i	m^2	0,0965		
11	V	» » » des Luftaustrittes F_a	m^2	0,0965		
12	R	Luftdurchlässigkeit beim Eintritt $\varphi_e = \frac{F_e}{F_{st}}$	—	0,711		
13	R	» innen $\varphi_i = \frac{F_i}{F_{st}}$	—	0,711		
14	R	» beim Austritt $\varphi_a = \frac{F_a}{F_{st}}$	—	0,711		
15	V	Röhrcheninnenfläche, wasserberührt	m^2	6,84		
16	V	» , nicht wasserberührt	m^2	6,80		
17	V	Mantelfläche	m^2	0,307		
18	V	Breite Leisten der Stirnfläche . . . Breite/Fläche	mm/m^2	2/0,055		
19	V	Schmale » » » . . . Breite/Fläche	mm/m^2	0,86/0,024		
20	V	Gesamte Kühlfläche (nicht reduziert)	m^2	14,03		
21	V	Freier Querschnitt der Wasserwege (größter) . . .	mm	$64 \times 1{,}6 \times 190$		
22	R	Gleichwertiger Durchmesser der Wasserwege . d_w	mm	3,2		
23						
24	V	Barometerstand	mm Q.-S.	745,3	745,3	745,3
25	V	Lufteintrittstemperatur . . . . t_{LE}	^0C	25,8	25,5	23,5
26	V	Wassereintrittstemperatur . . . . t_{WE}	^0C	76,4	76,7	76,4
27	V	Unterschied der Eintrittstemperaturen . $t_{HC} - t_{LE}$	^0C	50,6	51,2	53,1
28	R	$^1/_2 (t_{WE} + t_{LE})$	^0C	51,1	51,1	49,4
29	V	Spezifisches Gewicht der eintretenden Luft . . γ	$kg\,m^{-3}$	1,160	1,160	1,175
30						
31	V	Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler . . . W_f	$m\,s^{-1}$	38,6	32,6	27
32	V	» hinter » » . . . W_f	$m\,s^{-1}$	17,5	14,9	11,9
33	V	Mittlere Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen W_V	$m\,s^{-1}$	24,6	21,0	16,8
34	R	Dieselbe, berechnet aus (3), (3a), (3b) . . . W_R	$m\,s^{-1}$	25,1	21,0	17,2
35	R	$100 \frac{W_R}{W_V}$	—	102,0	100,0	102,5
36	R	Wärmeübergangszahl für Luft, Innenfläche . α_{L1}	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	109,5	95,2	81,2
37	R	Reduktionsfaktor für nicht wasserberührte Innenfläche . . . . ϑ	—	0,990	0,992	0,993
38	R	Reduzierte Innenfläche	m^2	13,52	13,54	13,55
39	R	Wärmeübergangszahl für Luft, Mantelfläche . α_{L2}	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	105,5	92,5	80,0
40	R	Dieselbe für breite Leisten der Stirnfläche . α_{L3}	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	310	281	258
41	R	» » schmale » » » . α_{L4}	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	480	415	385
42	R	Mittlere Wärmeübergangszahl für Luft . $\alpha_L = \frac{\Sigma \alpha F}{\Sigma F}$	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	109,9	95,8	82,3
43	R	» Wandtemperatur . . . . t_i	^0C	67,5	72,7	72,7
44	R	» Temper. der Wassergrenzschichte . $\frac{t_i + t_W}{2}$	^0C	—	—	—
45	R	Mittlere Wärmeübergangszahl für Wasser nach (25) und (29) . . . . α_H	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	1090	1140	1140
46	V—R	Dieselbe nach (27) aus Versuchen . . . . . α_{WV}	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	1140	987	1125
47	R	Mittlere Wärmedurchgangszahl . . . . . . k	$kcal\,m^{-2}h^{-1}Gr^{-1}$	92,0	82,3	72,2
48	R	kF	—	1292	1154	1022

tafel 1.

suchs- und Rechnungsergebnisse.

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
versuche des Motoren-Wien			v. Doblhoff, Untersuchung von Automobilkühlern										
8	8	8	72	73	74	83	39	47	52	56	65	79	76
Daimler V. 300 mm tief			Dr. Zimmermann in Ludwigshafen										
283 × 480 × 300			475 × 494 × 100 (mit Flanschen 500 × 500 × 100)										
0,1358			0,2347										
2970 × 5,6 × 5,6 □ × 300			(4046 + 68/2) × 7,6/7/7,6 ∅ × 100										
0,2			geschätzt 0,15										
5,6			7,6/7/7,6										
0,0933			0,185										
0,0933			0,157										
0,0933			0,185										
0,686			0,788										
0,686			0,669										
0,686			0,788										
10,08			9,073										
10,00			—										
0,458			0,095										
2/0,0595 1/0,026			0,092										
20,6			9,26										
64 × 1.6 × 290			492 × 86										
3,2			—										
743.6	743,6	743	angenommen 760										
25,3	25,3	20,4	19,3	21.9	19,3	20,2	20,0	19,4	19,8	20,1	20,5	20,4	20,0
73,2	74,9	73,0	51,3	87,3	92,1	92,5	63,7	50,8	63,2	94,0	86,9	95,5	60,3
47,9	49,6	52,6	32,0	65,4	72,8	72,3	43,7	31,4	43,4	73,9	66,4	75,1	40,3
49,2	50,1	46,7	35,3	54,6	55,7	56,3	41,9	35,1	41,5	57,0	53,7	57,9	40,2
1,155	1,155	1,170	1,205 (angenommen bei 760 mm Q-S und 20° C)										
38,9	32,75	26,85	17,0	17,0	17,0	13,0	13,0	9,0	9,0	5,0	5,0	2,5	2,5
16,1	13,6	10,8	10,2	10,2	10,2	7,6	7,6	5,0	5,0	2,6	2,6	1,12	1,21
23,4	19,8	15,75	15,2	15,2	15,2	11,4	11,4	7,5	7,5	3,9	3,9	1,68	1,81
21,6	18,1	14,5	15,0	15,0	15,0	11,4	11,4	7,7	7,7	4,2	4,2	2,0	2,0
92,3	91,4	92,1	98,9	98,8	98,8	100,0	100,0	102,5	102,5	107,5	107,5	119,0	110,0
95.4	83,0	70,0	76,1	74,0	73,4	59,4	60,9	44,8	44,7	26,8	26,8	15,3	15,3
0,992	0,993	0,994	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
19,90	19,92	19,96	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073	9,073
106,5	93,0	80,0	56,0	56,0	56,0	41,0	41,0	34 3	34,3	22,2	22,2	13,0	13,0
287 418	260 390	240 360	76,6	74,0	74,0	59,4	60,9	44,8	44,7	26,8	26,8	15,3	15,3
96,2	83,7	70,8	76,8	73,6	73,1	59,0	60,6	44,7	44,6	26,7	26,7	15,3	15,3
67,3	68,8	67,9	38,3	54,0	74,2	71,3	48,8	44,9	46,7	84,6	63,0	90,5	56,0
—	—	—	40,7	58,3	79,1	75,6	51,8	46,7	49,0	87,6	65,3	91,8	57,0
767	769	804	215	213	334	311	233	281	202	350	205	354	280
588	578	426	259	213	367	322	262	284	233	—	—	—	—
77,3	69,5	60,0	56,6	56,3	60,5	49,6	48,1	38,5	36,6	24,6	23,5	14,6	14,5
1592	1430	1233	524	522	560	459	445	357	339	228	217	134,5	134,0

Noch: Zahlen

Zusammenstellung der Ver

Nr.	1	2	3	4	5	6
49	R	Wasserwert des Wassers . . . . M	$kg\,h^{-1}$	4030	4010	4010
50	R	Spezifisches Gewicht der Luft bei $^1/_2\,(t_{LE}+t_{WE})$.	$kg\,m^{-3}$	1,070	1,068	1,078
51	R	Mittl. spez Gewicht der Luft bei $^1/_2\,(t_{LE}+t_{LA})$ . .	$kg\,m^{-3}$	1,125	1,128	1.140
52	V	Wassergeschwindigkeit . . . . W_W	$mm\,s^{-1}$	57,0	56,2	56,2
53	R	Wasserwert der Luft . . . . m	$kg\,h^{-1}$	2430	2042	1692
54	R	$\frac{k\,F}{M}$		0,321	0,288	0,255
55	R	$\frac{k\,F}{m}$		0,532	0,564	0,604
56	R	K_n		0,225	0,202	0,1785
57	R	K_K		0,223	0,201	0,1773
58	R	Gesamte übertragene Wärme, gerechnet . . . Q_K	$kcal\,h^{-1}$	45500	41200	37700
59	V	» » » , aus Versuch . . Q_V		46500	41500	37600
60	R	$100\,\frac{Q_K}{Q_V}$		97,9	99,1	100,3

Wärme $Q_k = 45500$ kcalh^{-1}. Bei dem Versuche wurde als Wasseraustrittstemperatur $64{,}9^0$ C gemessen; daraus ergibt sich eine gesamte übertragene Wärme

$$Q = (76{,}43 - 64{,}9)\cdot 4030 = 46500.$$

Die Rechnung weicht davon nur um $-2{,}1$ vH ab. (= Anteil der Strahlung + Fehler).

Nach (27) aus dem berechneten α_L, sowie der übertragenen Wärme Q und der mittleren Wasser- und Lufttemperatur bestimmt, wird $\alpha_W = 1140$, also in guter Uebereinstimmung mit dem aus (25) berechneten Wert.

b) Kühler von Dr. Zimmermann (v. Doblhoffs Versuche). Der Gang der Rechnung entspricht vollkommen dem Beispiel a); nur mußte das Gesetz für den Wärmeübergang des Wassers auf das Bündel runder Röhren mangels anderer Quellen nach (27) aus den Versuchen v. Doblhoffs abgeleitet werden. Diese ermöglichten es nicht, das Gesetz im Sinne Nußelts[1]) allgemein aufzustellen; doch dürfte die Gleichung

$$\alpha_W = 90\,(2{,}5 + w)^{0{,}3}\,(1 + 0{,}008\,t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29),$$

worin w die Wassergeschwindigkeit im unverengten Querschnitt, t das Mittel aus der mittleren Wassertemperatur und der Wandtemperatur ist und welche die Versuchswerte gut wiedergibt, für die bei Kühlern gewöhnlich vorkommenden Röhrchenaußendurchmesser von 5 bis 8 mm und den Temperaturbereich 40 bis 90^0 C allgemein verwendbar sein. In der Größenordnung stimmen diese Wärmeübergangszahlen mit den Werten der Gleichung (25) überein.

c) Zahlentafel 1. Hier ist eine größere Anzahl fremder Versuche mit den unmittelbar aus den Abmessungen, der Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler, der Kühlwassermenge und der Kühlwassereinlauftemperatur berechneten Werten verglichen, wobei sich durchwegs die Anwendbarkeit des entwickelten Rechnungsganges zeigt.

Im einzelnen wäre zu bemerken:

Die den Versuchsberichten unmittelbar entnommenen oder daraus durch einfache Umrechnungen erhaltenen Werte sind durch »V«, die durch den oben entwickelten Rechnungsgang mit »R« bezeichnet.

Die berechnete Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen, welche den größten Einfluß auf die Wärmeübertragung hat, zeigt bis zu 4 ms^{-1} (etwa 5 ms^{-1} vor dem Kühler bei v. Doblhoff entsprechend) sehr gute Uebereinstimmung mit den Versuchswerten. Unterhalb dieses Grenzwertes, der auch der kritischen Geschwindigkeit in den 7 mm-Röhrchen entspricht, gibt die Rechnung für den Zimmermannkühler auch noch ziemlich richtige Werte, wie es ja bei der Kürze der Anlaufstrecke für den Uebergang von der Wirbelströmung in die laminare zu erwarten ist; doch wären für sehr tiefe Kühler (über 150 mm) bei $W < 4$ die Formeln nur mit Vorsicht zu verwenden. Wahrscheinlich sind auch die gemessenen Werte dieser kleinen Geschwindigkeiten mit in Betracht kommenden

[1]) Nußelt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges, Gesundh.-Ing. 1915, S. 477.

tafel 1.

suchs- und Rechnungsergebnisse.

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3850	3820	4180	709	400	2000	1500	768	2000	400	2000	250	2000	1500
1,071	1,070	1,075	1,145	1,086	1,070	1,075	1,120	1,145	1,123	1,070	1,080	1,068	1,130
1,113	1,105	1,115	1,162	1,136	1,090	1,180	1,130	1,150	1,130	1,155	1,173	1,135	1,170
36,1	34,8	38,1	4,66	2,63	13,15	9,85	5,05	13,15	2,63	13,15	1,64	13,15	9,43
2023	1798	1354	2390	2340	2245	1860	1753	1210	1185	666	676	312	322
0,414	0,374	0,295	0,740	1,305	0,280	0,306	0,592	0,178	0,848	0,114	0,868	0,0673	0,0892
0,787	0,795	0,912	0,220	0,223	0,250	0,246	0,254	0,295	0,286	0,342	0,321	0,431	0,416
0,259	0,236	0,190	0,500	0,740	0,221	0,240	0,416	0,144	0.541	0,0928	0,544	0,054	0 0715
0,256	0,234	0,188	0,483	0,687	0,220	0,238	0,408	0,143	0,524	0,0926	0,526	0,054	0,0712
47300	44300	41400	10980	17980	32000	25800	13730	8990	9100	13700	8750	8110	4320
45700	42450	38000	11500	18800	32400	25600	13830	9000	9480	14200	9500	9600	5400
103,5	104,5	109,0	95,4	95,5	98,8	100,8	99,4	99,9	97,1	96,5	92,1	84,5	80,2

Fehlern behaftet, weshalb v. Doblhoff bei den Versuchen mit $2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ Fahrgeschwindigkeit die aus Lufttemperatur und Geschwindigkeit sich ergebende Wärme nicht in seinen Versuchsbericht aufgenommen hat.

Die durch Rechnung bestimmten Werte der übertragenen Wärme stimmen fast durchwegs sehr gut mit denen der Versuche überein; sie müssen etwas kleiner sein als die dort durch Kühlwassermenge und Temperatur bestimmten, und zwar um einen mit sinkender Luftgeschwindigkeit größer werdenden Betrag (in Prozenten der übertragenen Wärme gemessen), der den Anteil der Strahlung darstellt; auch hierin deckt sich die Rechnung im allgemeinen mit den Versuchen.

Größere Unterschiede zeigen sich gegen v. Doblhoffs Versuche bei einer Fahrgeschwindigkeit von $2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, was nach dem oben gesagten erklärlich ist, und bei dem Daimler-Kühler 300 mm tief. Hier zeigen sich auch zwischen den unmittelbar berechneten und den aus Versuchen mit Hilfe der Wärmeübergangszahl für Luft gewonnenen Wärmeübergangszahlen für Wasser, die sonst sehr gut übereinstimmen, große Unterschiede, die ich ungleichen Wassergeschwindigkeiten in einzelnen Wasserwegen infolge der großen Kühlertiefe zuschreibe. Eine sichere Aufklärung darüber ist jetzt allerdings nicht mehr möglich, aber der größte Unterschied zwischen Rechnung und Versuch ist auch hier nur 9 vH.

Für Ueberschlagsrechnungen wird es genügen, wenn die Stirn- eventuell auch die Mantelfächen den Röhrchen-Innenflächen zugeschlagen und durchwegs mit der Wärmeübergangszahl für Luft im Rohr gerechnet wird; auch der Einfluß mittelbarer Kühlung, sowie die Strahlung kann ohne wesentliche Fehler vernachlässigt werden, besonders da sich diese teilweise aufheben; dagegen scheint es unbedingt unzulässig, die Wärmeübergangszahl für Wasser so hoch einzusetzen, wie es in der einschlägigen Literatur — bei v. Doblhoff angefangen — durchwegs geschah, ohne die Wassergeschwindigkeit zu berücksichtigen, da der Fehler besonders bei großen Luft- und kleinen Wassergeschwindigkeiten groß werden kann.

II. Der Einfluß der Abmessungen und Betriebsbedingungen auf den Wärmeaustausch.

Da es nicht leicht ist, mit Hilfe der Gleichungen allein zu überblicken, wie die Kühlwirkung durch die Querschnittsform und die Abmessungen der Röhrchen und des Blockes, die Luftgeschwindigkeit, die durchfließende Wassermenge, die Eintrittstemperaturen der Luft und des Wassers und die Dichte der Luft beeinflußt wird, sollen diese Einflüsse nunmehr planmäßig und in möglichst weitem Bereich untersucht werden, jedoch unter Beschränkung auf den Wärmeaustausch durch die Röhrchenwände, da die Berücksichtigung der Stirnflächen und der Seitenflächen des Rahmens den Ueberblick erschweren würde, während ihr Anteil an der Wärmeübertragung gegen den der Röhrcheninnenflächen, wie oben gezeigt wurde, verhältnismäßig klein ist und nachträglich leicht einbezogen werden kann.

Auch von dem kleinen Anteil der Wärmestrahlung wird hier abgesehen.

1. Die Querschnittsform der Röhrchen. Nach den Hauptgleichungen (4a), (16), (17), (18a) und (25) I hängt der Wärmeaustausch bei unveränderter Stirn- und Kühlfläche, Blocktiefe, Wasser- und Luftgeschwindigkeit nur von dem gleichwertigen Durchmesser der Röhrchen

$$d = 4f/u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und von der Luftdurchlässigkeit φ ab. Setzt man vorerst

$$\varphi = 1,$$

was sehr kleine Röhrchenwandstärken und Wasserquerschnitte und die Stirnfläche vollkommen, aber ohne Ueberdeckung ausfüllende Röhrchenquerschnitte voraussetzt, so folgt: Kühler gleicher Stirnfläche und Blocktiefe sind bei gleichem Verhältnis der Stirnfläche zur Kühlfläche gleichwertig.

Für die Röhrchenzahl n, die Stirnfläche $F_{st} = nf$ und die luftberührte Kühlfläche $F = nul$ folgt nämlich aus (1)

$$d = \frac{4\, F_{st}/n}{F/(nl)} = 4\, l\, F_{st}/F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a),$$

worin nach Voraussetzung l unverändert bleibt.

Die Zahlentafel 3 enthält für verschiedene Querschnittsformen von Röhrchen, die (1a) genügen und Quadratröhrchen von 6 mm Seitenlänge gleichwertig sind, die Seitenlängen, Querschnittsflächen, Umfänge und Röhrchenzahl auf 1 m² Stirnfläche. Zum Vergleich sind auch die gleichen Maße für gleichwertige Kreisquerschnitte bei quadratischer und rhombischer Verteilung der Mittelpunkte berechnet. Die größte Luftdurchlässigkeit (bei sehr kleiner Wandstärke und sehr kleiner Weite des Wasserdurchganges) ist aber hier nur

$$\varphi = 0{,}7854 \text{ bei quadratischer,}$$
$$\varphi = 0{,}905 \quad » \quad \text{rhombischer Mittelpunktsverteilung,}$$

also wesentlich ungünstiger als bei flächenausfüllenden, geradseitigen Querschnitten bei gleichem Materialaufwand, der durch die Größe der Kühlfläche bei 100 mm Blocktiefe

$$F = n\,u\,l = 66{,}67 \text{ m}^2$$

für alle Querschnitte gekennzeichnet ist. Da bei den regulären Formen der Röhrchenquerschnitte (gleichseitiges Dreieck, Quadrat, reguläres Sechseck, Kreis) die größte Röhrchenzahl auftritt und Arbeit und Lötmaterialbedarf mit der Röhrchenzahl im allgemeinen steigen, bedingen sie auch einen Größtwert der Herstellungskosten des Blockes bei gleicher Kühlwirkung.

Um den Einfluß der endlichen Wandstärke $a/2$ (gewöhnlich 0,1 bis 0,2 mm) und der Weite der Wasserdurchgänge a_w (gewöhnlich 1,0 bis 2,5 mm) zu zeigen, ist in Abb. 7 die übertragene Wärme für rechteckige Querschnitte, lotrechten Wasserdurchgang und ein unverändertes Verhältnis F_{st}/F bei den Seitenverhältnissen $d_1/d_2 = 0{,}2 - 3$ und

Zahlen

Vergleich verschiedener Röhrchenquerschnitte bei sehr kleinen Wand

Stirnfläche des Blockes $F_{st} = 1 \times 1$ m², Röhrchen

d_1/d_2		0,6	1,0	1,5	2,0
d_1	mm	12,95	10,2	12,75	14,28
d_2	mm	19,9	10,2	8,5	7,64
Gleichwertiger Durchmesser d	mm	6,0	6,0	6,0	6,0
Röhrchenzahl auf 1m² n		15200	21750	19600	17450
Querschnitt eines Röhrchens f_{st}	mm²	65,8	46,2	51,0	57,0
Kühlfläche eines Röhrchens f	mm²	4380	3060	3400	3820
Luftdurchlässigkeit $\varphi_i = \frac{n\, f_{st}}{F_{st}}$		1,0	1,0	1,0	1,0

im Vergleich mit Quadratröhrchen von 6×6 mm² Querschnitt bei einer Luftgeschwindigkeit $W_f = 10$ m s^{-1} dargestellt.

Unverändert sind hier $F_{st} = 1$ m², $F = 44{,}486$ m², $a/2 = 0{,}15$ mm, $a_W = 2{,}0$ mm (siehe Abb. 5), die Lötfuge $g = 0{,}2$ mm und die Löttiefe an den Stirnflächen (= 5 mm), so daß die Wasserquerschnitte 90 mm lang sind. Der Wasserwert des durchfließenden Wassers $M = 10\,000$ kg h^{-1}, die Wassereintrittstemperatur $t_{WE} = 60^0$ C, die Lufteintrittstemperatur $t_{LE} = 20^0$ C und das spezifische Gewicht der eintretenden Luft $\gamma_E = 1{,}200$ kg/m³.

Als mittleres spezifisches Gewicht der Luft wurde in (4 b) und (18 a) $\gamma_m = 1{,}122$ eingesetzt, entsprechend einer Mitteltemperatur von 40^0 C; der Wasserwert der durchfließenden Luft m ist für (13) und (16) schon aus dem spezifischen Gewicht bei der wahren mittleren Austrittstemperatur berechnet.

Die Wirkung der mittelbar gekühlten Wendungen wurde durch Multiplikation der mittelbar gekühlten luftberührten Kühlfläche F_{m1} mit dem Korrektionsfaktor ϑ (Abb. 6) mit $\lambda = 100$ kcal m^{-1} h^{-1} ^{0}C^{-1} berücksichtigt.

Dem Einfluß des Kreuzstromes wurde nach (16) und (16a), dem Unterschied der wasser- und luftberührten Kühlfläche nach (17) Rechnung getragen.

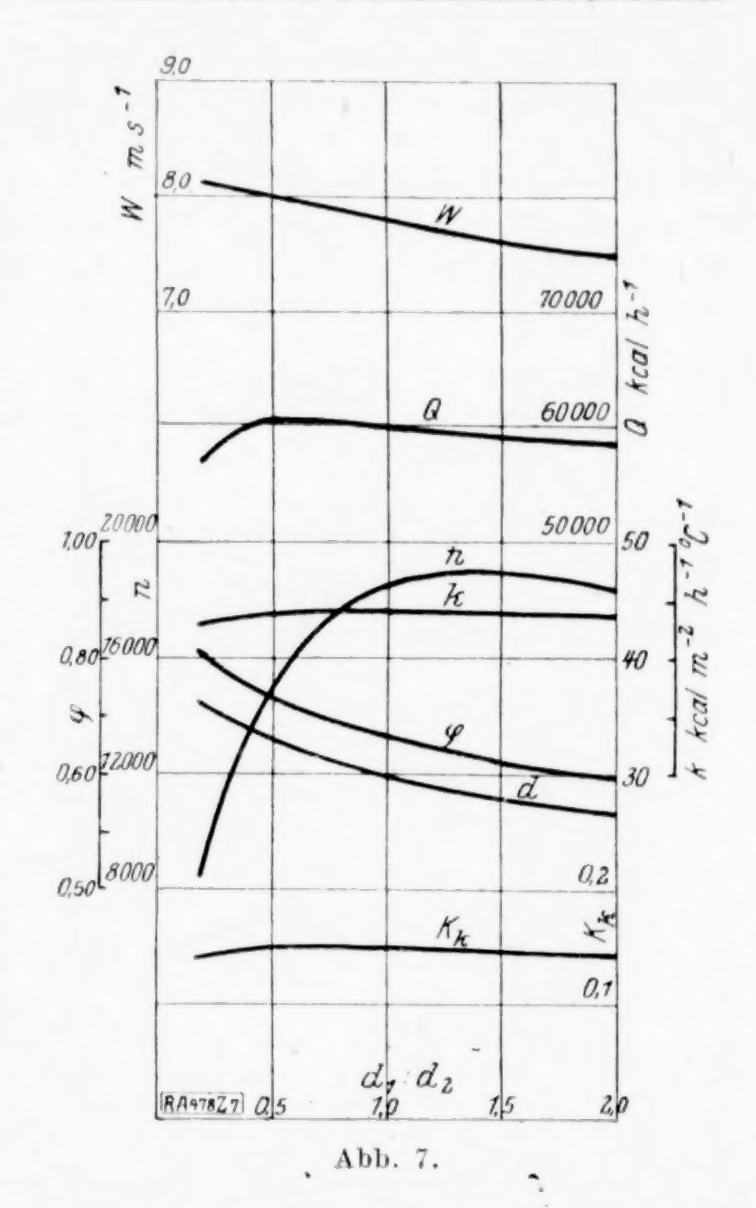


Abb. 7.

Wie Abb. 7 zeigt, gilt auch hier angenähert das Gesetz, daß Kühler gleicher Stirnfläche und Blocktiefe bei gleichem Verhältnis von Stirnfläche zur Kühlfläche gleichwertig sind, ein Größtwert für Q ist aber trotzdem zu erkennen, und zwar bei einem Verhältnis $d_1/d_2 \sim 0{,}6$; dieses Q ist um etwa 1,5 vH größer als bei einem Block aus Quadratröhrchen.

Bei größeren Werten von d_1/d_2 wirkt die verminderte Luftdurchlässigkeit nachteilig, bei kleineren die geringe Ausnützung der mittelbar gekühlten Flächen. Auch hier hat aber das Verhältnis Q/n bei angenähert gleichen Seitenlängen einen Kleinstwert, dem ein Größtwert an Arbeit und Lötmaterialaufwand entspricht.

tafel 3.

stärken und Wasserquerschnitten mit Quadratröhrchen 6×6 mm².

länge $l = 100$ mm, Kühlfläche $F = 66{,}77$ m².

0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	—	—	—
6,14	6,66	8,49	10,8	13,32	3,6	4,5	6,0	7,5	9,0	3,464	4,72	5,44
30,7	13,32	8,49	7,20	6,62	18,0	9,0	6,0	5,0	4,5	—	—	—
6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	4,72	5,44
10650	22600	27800	25700	22600	15400	24700	27777	26700	24700	32100	45000	38800
94,0	44,4	36,0	38,9	44,4	64,8	40,5	36,0	37,5	40,5	31,2	17,5	23,24
6200	2940	2400	2590	29,5	4320	2700	2400	2500	2700	2028	1483	1709
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,7854	0,905

Die Verbesserung der Kühlwirkung durch Verwendung von Rechteckröhrchen, deren kürzere Seiten parallel zur Richtung der Wasserströmung liegen, bei einem Seitenverhältnis $d_1/d_2 = 0{,}5 - 0{,}8$ ist immerhin bemerkenswert, da sie ohne Mehraufwand an Material und Arbeit erreicht werden kann.

2. Die Querschnittsgröße und Länge der Röhrchen. In den Abb. 8 bis 10 sind für Quadratröhrchen von 2 bis 15 mm Seitenlänge (innen) 25 bis 500 mm Länge (Blocktiefe), mit lotrechten Wasserdurchgängen und bei einer Luftgeschwindigkeit vor dem

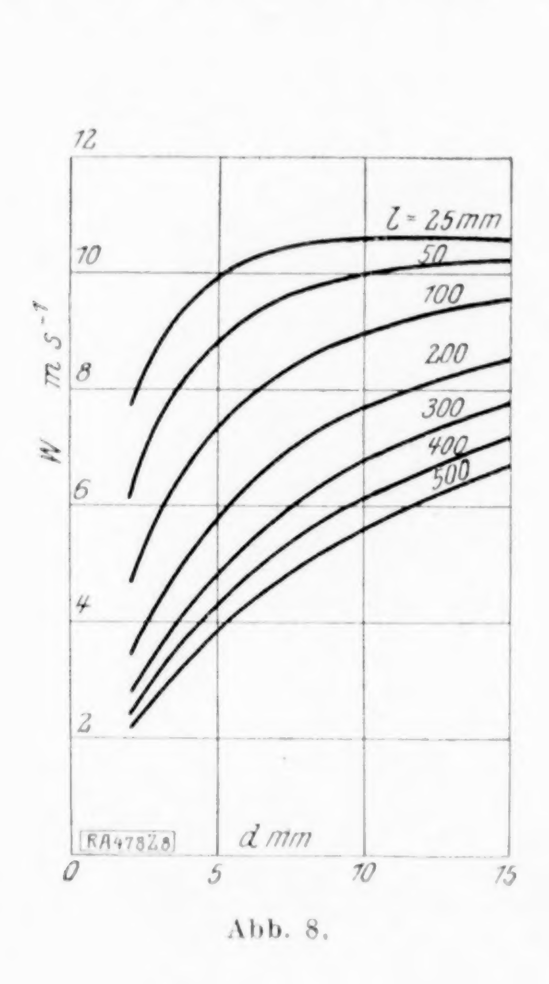


Abb. 8.

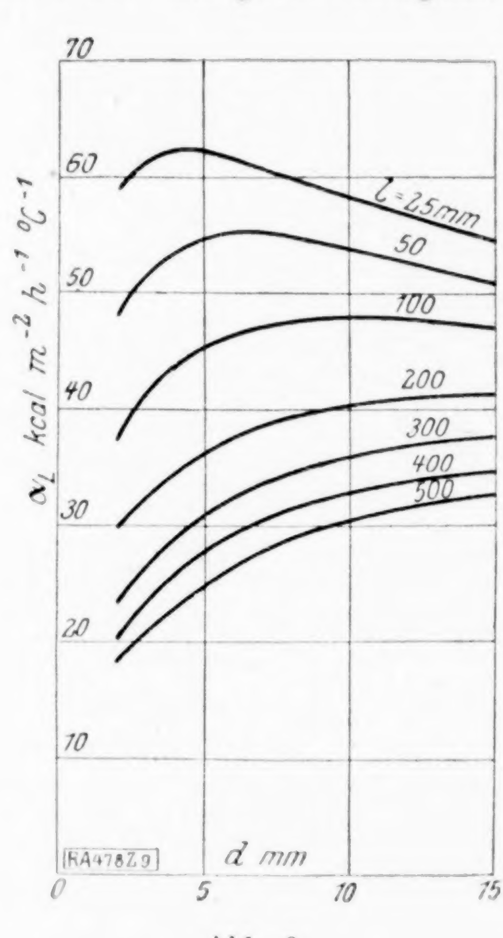


Abb. 9.

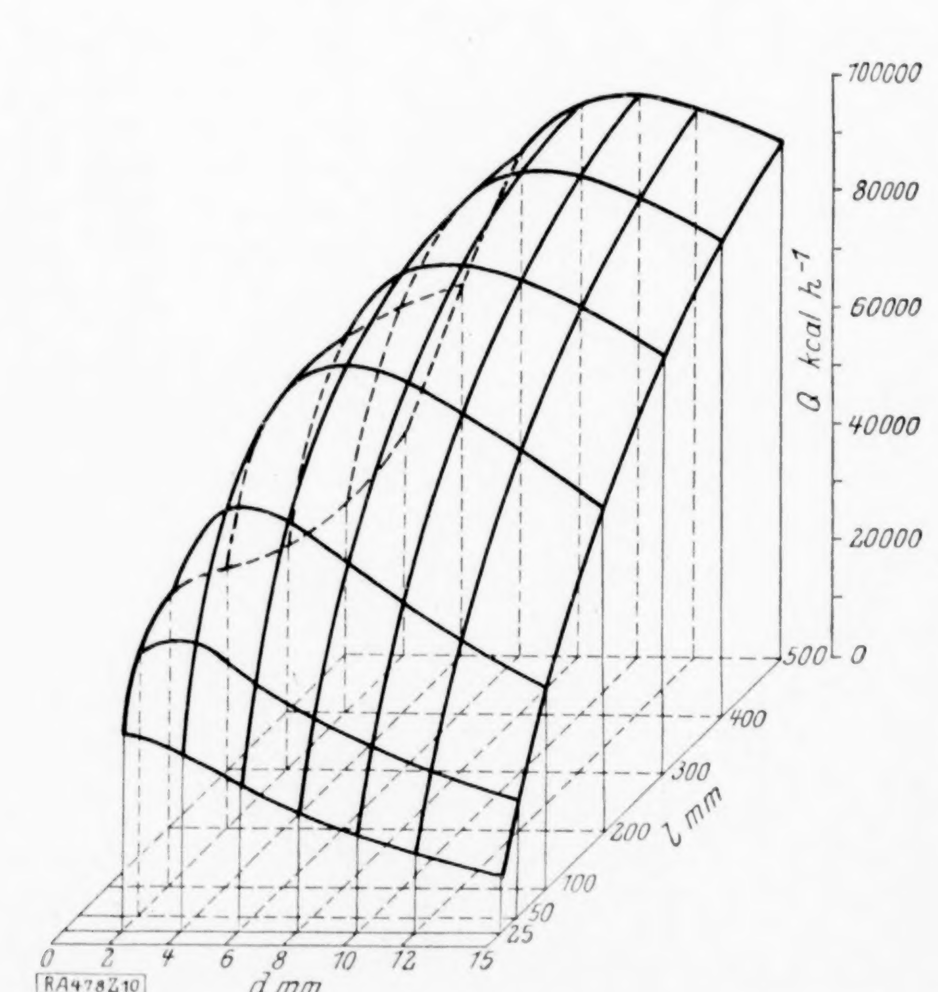


Abb. 10.

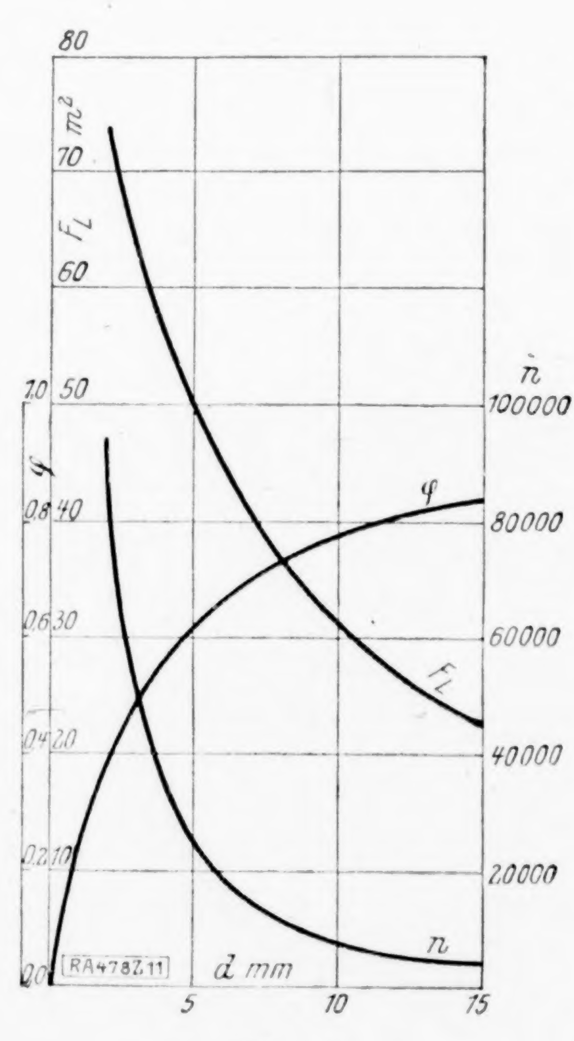


Abb. 11.

Kühler von 10 ms^{-1} die Luftgeschwindigkeiten in den Röhrchen, die Wärmeübergangszahlen für Luft und Wasser und die übertragenen Wärmemengen zusammengestellt.

Dabei sind unverändert geblieben

$$F_{st} = 1 \times 1\ m^2,\quad a/2 = 0{,}15\ mm\ \text{(Siehe Abb. 5 und 11)},\quad a_W = 2{,}0\ mm,\quad g = 0{,}2\ mm$$
$$M = 10000\ kg\ h^{-1},\ t_{WE} = 60^0\ C,\quad t_{LE} = 20^0\ C,\ \gamma_{LE} = 1{,}200\ kg\ m^{-3}.$$

Die Lötung der Stirnfläche wurde beiderseits 5 mm tief angenommen, so daß sich eine Tiefe der Wasserkammern $l_1 = l - 10$ ergibt.

Die Röhrchenzahl, Luftdurchlässigkeit, wasser- und luftgekühlte Kühlfläche zeigt Abb. 11 für 100 mm Blocktiefe. Der Einfluß des Kreuzstromes, der mittelbaren Wandkühlung und der Unterschied der wasser- und luftberührten Kühlfläche wurden wie im 1. Abschnitt berücksichtigt, in (4 b) und (18 a) das spezifische Gewicht $\gamma_m = 1{,}122$ entsprechend einer Mitteltemperatur von 40 ° C eingesetzt. Für die Berechnung des Wasserwertes m wurde das spezifische Gewicht bei der mittleren Austrittstemperatur der Luft benützt.

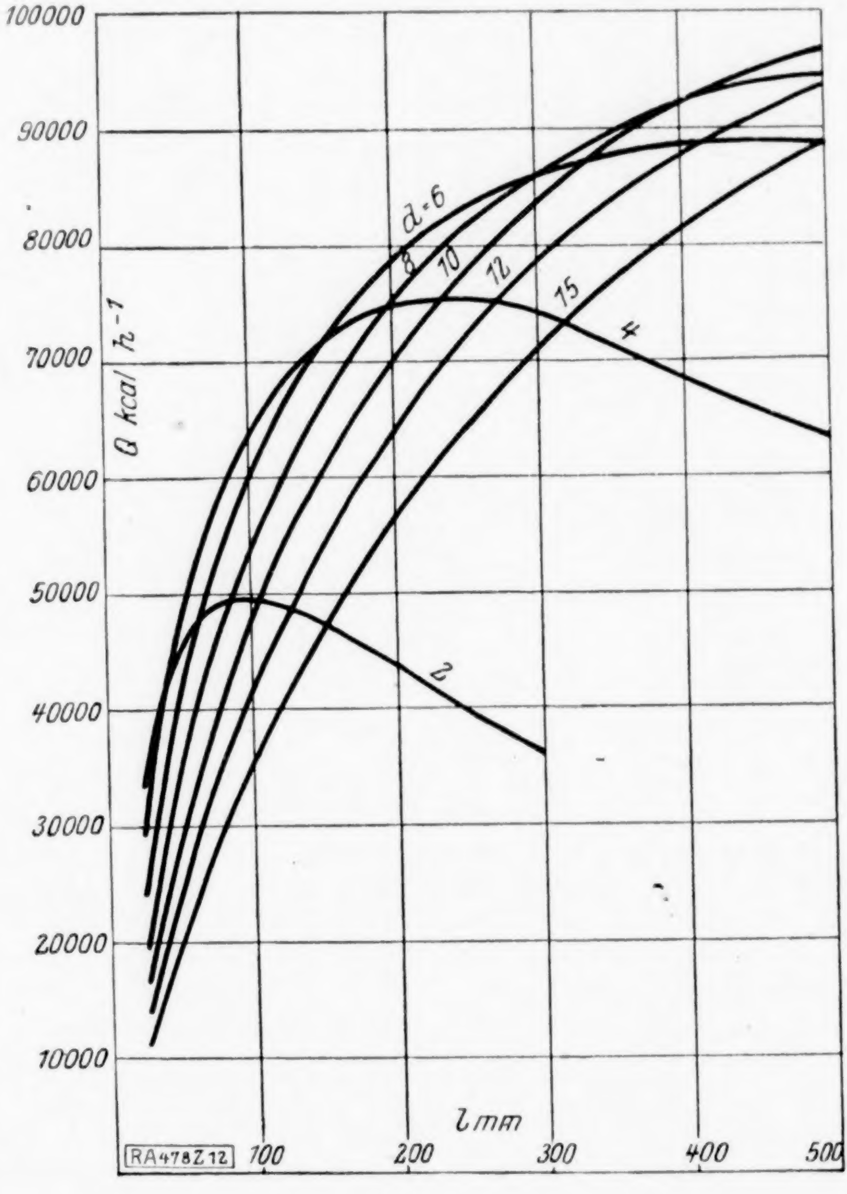


Abb. 12.

Aus den Zahlentafeln und Bildern ergibt sich ein wichtiges Gesetz: Bei einer vorgegebenen Größe der Stirnfläche, Luftgeschwindigkeit und durchfließenden Wassermenge kann die Kühlleistung durch eine Vergrößerung der Kühlfläche, sei es daß sie durch Verlängerung der Röhrchen oder durch Vermehrung der Röhrchenzahl bei gleichzeitiger Querschnittsverkleinerung bewirkt wird, nur bis zu einem bestimmten Größtwert gesteigert werden; bei einer weiteren Vergrößerung der Kühlfläche nimmt sie wieder ab, die Vergrößerung ist also wertlos. Da in der Nähe des Größtwertes der Kühlleistung ihre Zu- oder Abnahme sehr langsam erfolgt, ist auch in einem großen Bereich unterhalb dieses Maximums der $Q - d - l$-Fläche eine Verlängerung der Röhrchen oder Vermehrung ihrer Zahl unwirtschaftlich.

Bei zunehmender Röhrchenlänge und unveränderter Röhrchenzahl (und damit unverändertem Querschnitt des Einzelröhrchens) zeigen sich Größtwerte der Kühlleistung und flacher Verlauf der $Q - l$-Kurve in deren Nähe und zwar liegen bei größeren Querschnitten auch die Größtwerte der Kühlleistung bei größeren Röhrchenlängen.

Aehnliches gilt bei zunehmender Röhrchenzahl (abnehmendem Querschnitt) und unveränderter Röhrchenlänge auch von der $Q - d$-Kurve; die Größtwerte der Kühlleistung liegen bei größeren Röhrchenlängen auch bei größeren Röhrchendurchmessern [1]).

Bei größeren Luftgeschwindigkeiten liegen die Größtwerte der Kühlleistung auch bei größeren Röhrchenlängen und Röhrchenzahlen (kleineren Röhrchendurchmessern); doch ist die Abweichung verhältnismäßig gering.

[1]) Daß Größtwerte für Q bei veränderlichen d und l auftreten müssen, läßt sich auch ohne Rechnung daraus schließen, daß bei sehr kleinen d die Kühlfläche groß, die Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen sehr klein, bei sehr großen d diese zwar nahezu gleich der des freien Luftstromes, die Kühlfläche aber klein wird. Bei kleiner Blocktiefe ist auch die Kühlfläche klein, bei sehr großer die Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen; in den extremen Fällen ist also auch die übertragene Wärmemenge klein.

Um die Verhältnisse klar erkennen zu lassen, zeigt Abb. 12 den Einfluß der Röhrchenweite und Tiefe in etwas anderer Darstellung bei 10 m Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler.

Mit diesen Feststellungen stehen die Versuchsergebnisse des Wiener Motorenwerkes in sehr guter Uebereinstimmung, die an 300 mm tiefen Flugzeugkühlern nur sehr wenig bessere Kühlleistungen ergaben als an 200 mm tiefen und die Tatsache, daß fast alle auf Grund langjähriger Erfahrung entworfenen Fahrzeugkühler Röhrchenquerschnitte zwischen 20 und 70 mm² und selten Blocktiefen über 150 mm haben.

3. Die Stirnform[1]) **des Blockes** gleicher Tiefe an allen Stellen ist unter sonst gleichen Verhältnissen, besonders bei unveränderter Wassergeschwindigkeit ohne Einfluß auf die Kühlleistung.

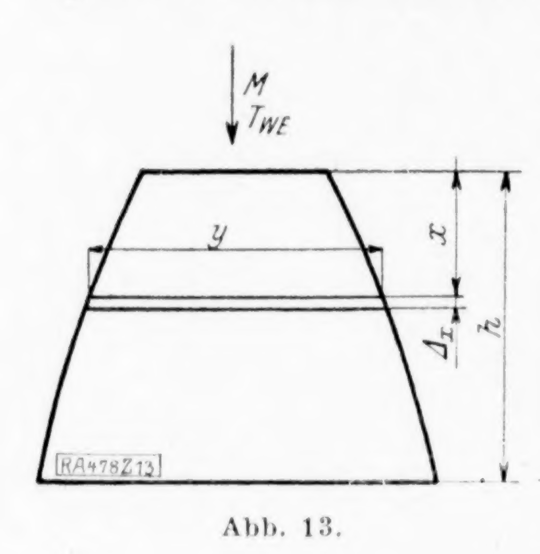


Abb. 13.

Dies läßt sich für Kühler kleiner Tiefe, bei denen die mittlere Lufttemperatur in jedem Röhrchen dem arithmetischen Mittel aus Ein- und Austrittstemperatur gleich gesetzt werden kann, in folgender Weise[2]) zeigen.

In einem durch horizontale Querschnitte erzeugten Kühlerstreifen der Dicke Δx (Abb. 13) tritt das Wasser mit der Temperatur t_{WE} ein, mit t_{WA} aus, die Luft mit der überall gleichen Temperatur T_{LE} ein mit t_{LA} aus, der Wasserwert des stündlich durchfließenden Wassers ist M, der Luft

$$\Delta m = m_1 \, y \, \Delta x \quad \ldots \quad (30),$$

worin y die Breite des Streifens, m_1 der Wasserwert der die Flächeneinheit stündlich durchströmenden Luftmenge ist. In den Kühler selbst tritt das Wasser mit der unveränderlichen Temperatur T_{WE} ein.

Bezeichnet f_1 die der Stirnfläche von 1 m² entsprechende Kühlfläche, so entspricht der Stirnfläche des Streifens die Kühlfläche

$$\Delta F = f_1 \, y \, \Delta x \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Für die im Streifen übertragene Wärme ΔQ und die im Blockteil x übertragene Wärme Q gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q &= (t_{LA} - T_{LE}) \, \Delta m \\ \Delta Q &= k \, \Delta F \left(\frac{t_{WE} + t_{WA}}{2} - \frac{T_{LE} + t_{LA}}{2} \right) \\ Q &= (T_{WE} - t_{WE}) \, M \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (32),$$

woraus

$$\frac{\Delta Q}{\Delta m} + \frac{2 \, \Delta Q}{k \, \Delta F} + \frac{Q}{M} = T_{WE} + t_{WA} - 2 \, T_{LE}$$

und mit

$$t_{WA} = T_{WE} - \frac{Q}{M} - \frac{\Delta Q}{M}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta m} + \frac{2 \, \Delta Q}{k \, \Delta F} + \frac{2 \, Q}{M} + \frac{\Delta Q}{M} = 2 \, (T_{WE} - T_{LE}) \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

folgt.

Durch Einsetzen der Werte für ΔF und Δm aus (30) und (31) und Vernachlässigung des sehr kleinen Gliedes $\frac{\Delta Q}{M}$, sowie Ersatz der Differenzen durch Differentiale, der bei der üblichen, verhältnismäßig großen Röhrchenzahl mit guter Annäherung möglich ist, ergibt sich

$$2 \, \frac{Q}{M} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{k \, f_1} \right) \frac{d \, Q}{y \, d \, x} - 2 \, (T_{WE} - T_{LE}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

und die gesamte übertragene Wärme

$$Q = M \, (T_{WE} - T_{LE}) \left(1 - e^{- \frac{\int_0^h y \, d \, x}{M \left(\frac{1}{2 \, m_1} - \frac{1}{k \, f_1} \right)}} \right) \quad \ldots \ldots \quad (35).$$

[1]) Die Form der Projektion des Blockes auf eine zu den Röhrchenachsen senkrechte Ebene.

[2]) Ohne diese Annahme müßte der Ansatz ähnlich dem Nußelts in »Der Wärmeübergang im Kreuzstrom« a. a. O. sein; doch ist meines Erachtens das Resultat der Näherungsrechnung durchsichtiger.

$\int_0^h y\,dx$ stellt die Stirnfläche dar, gleichgültig in welcher Weise die Breite y von x abhängt und daher ist auch Q unabhängig von der Form der Stirnfläche, wohl aber abhängig von ihrer Größe. (35) steht als Näherungsgleichung zwischen (13) und (16).

4. Die Stirnflächengröße beeinflußt im allgemeinen auch die Menge und Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers, nicht aber die Wärmeübergangszahl für Luft. Der Wasserwert der durchströmenden Luft ist der Stirnfläche proportional und daher in (13) $k\,F/m$ bei Aenderung der Stirnflächengröße unverändert. Der Einfluß der Wassergeschwindigkeit auf die Wärmedurchgangszahl ist verhältnismäßig klein und hängt auch vom Verhältnis der Seitenlängen des Kühlers ab. Da er wie (13) zeigt, durch die gleichzeitige Aenderung im Zähler und Nenner noch verringert wird, soll er in diesem Abschnitt vernachlässigt, die Wärmedurchgangszahl k konstant angenommen werden. Die Vergrößerung der Kühlfläche kann eine Vergrößerung, Gleichheit oder Verkleinerung des Wasserwiderstandes und des Gesamtquerschnittes des Wasserdurchlaufes und damit zugleich eine entsprechende Aenderung der durchfließenden Wassermenge bewirken, so daß folgende Fälle zu unterscheiden sind:

a) Die durchfließende Wassermenge wächst proportional der Stirnfläche. Da der Wasserwert der durchfließenden Luft jedenfalls proportional der Stirnfläche ist — alle anderen Konstruktionsmaße bleiben —, so ändert sich K_n bzw. K_k nach (13) und (16) nicht, und die übertragene Wärme ist ebenfalls proportional der Wassermenge, also auch der Stirnfläche (Abb. 14).

b) Die durchfließende Wassermenge und damit auch die übertragene Wärme wächst schneller als die Stirnfläche.

c) Die durchfließende Wassermenge und damit auch die übertragene Wärme wächst langsamer als die Stirnfläche.

Ein Sonderfall ist der, daß die Wassermenge unverändert bleibt. Für diesen Fall zeigt Abb. 14 an dem Quadratröhrchenkühler mit 6×6 mm^2 Röhrchenweite, 100 mm tief, bei einer Luftgeschwindigkeit von $10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und einer durchfließenden Wassermenge $M = 10\,000\ \mathrm{kg\,h^{-1}}$ den Einfluß der Stirnflächenänderung auf die Kühlwirkung, wobei die übrigen Verhältnisse dem in Abschnitt 2 besprochenen Kühler entsprechen.

Die von der Stirnflächeneinheit übertragene Wärme sinkt in diesem Falle mit steigender Größe der Stirnfläche.

Sinkt die durchfließende Wassermenge mit steigender Stirnflächengröße, so ist der Einfluß auf die übertragene Wärme natürlich größer.

Jedenfalls hängt der Charakter der Q-F_{st}-Kurve wesentlich von dem Mittel ab, durch welches die Wasserbewegung bewirkt wird.

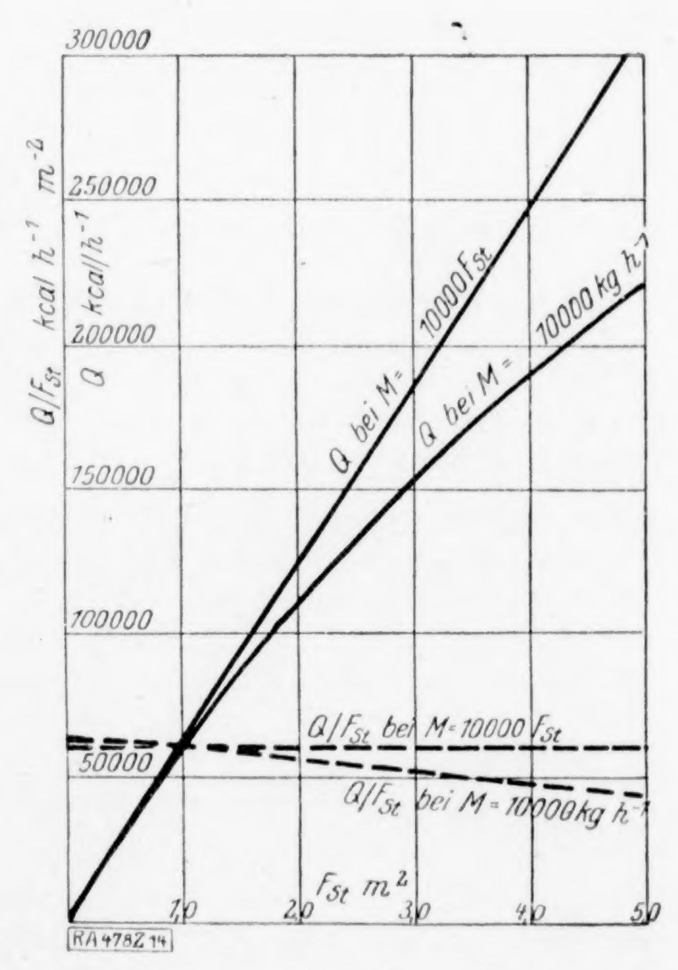


Abb. 14.

5. Die Geschwindigkeit des Luftstromes vor dem Kühler hat den größten Einfluß auf die Kühlwirkung, wie allgemein schon aus (4a), (16), (17) und (18), hervorgeht.

Für den Quadratröhrchenkühler mit 6×6 mm^2 Röhrchenweite, 100 mm Blocktiefe, 1×1 m^2 Stirnfläche, $10\,000\ \mathrm{kgh^{-1}}$ durchströmendes Wasser und bei den übrigen im Abschnitt 2 angegebenen Verhältnissen zeigt Abb. 15 den Einfluß der Luftgeschwindigkeit; ebenso Abb. 16 in logarithmischem Maßstab für Quadratröhrchen praktisch üblicher Abmessungen. Es zeigt sich, daß sich für den ganzen Bereich eine Näherungsgleichung von der Form

$$Q = A\,W_l^r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

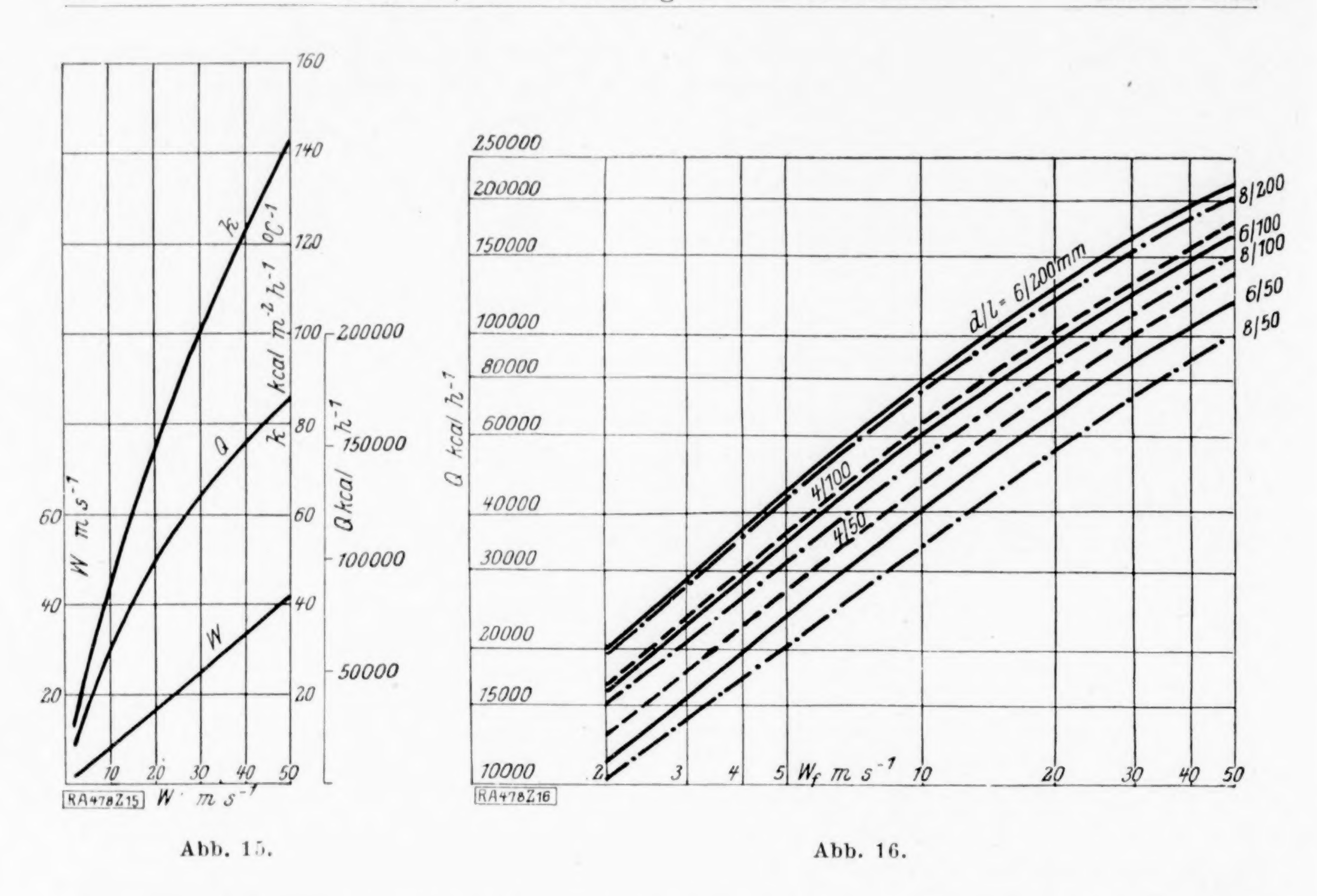


Abb. 15.

Abb. 16.

mit unveränderlichem r nicht aufstellen läßt, daß aber doch r für ziemlich weite Teilintervalle der Geschwindigkeit konstant angenommen werden kann.

$$\left(\begin{array}{llll} W_f = 2 & 20 & 50 \text{ ms} \\ r \sim 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}85 & \end{array}\right),$$

was Untersuchungen über das Zusammenarbeiten von Motor und Kühler erleichtert.

6. Der Einfluß der durchfließenden Wassermenge ist, wie Abb. 17 für den auch im vorigen Abschnitt als Beispiel herangezogenen Quadratröhrchenkühler bei 10 ms^{-1} Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler zeigt, bei kleinen Wassermengen sehr beträchtlich, wird aber mit zunehmenden Wassermengen, wie sie an Fahrzeugkühlern gewöhnlich vorkommen, immer weniger maßgebend. Bei Thermo-

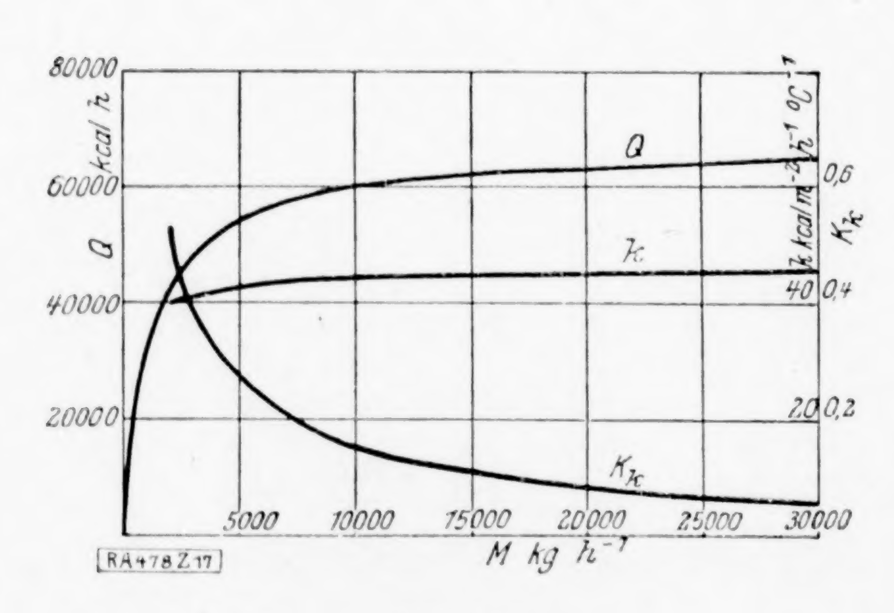


Abb. 17.

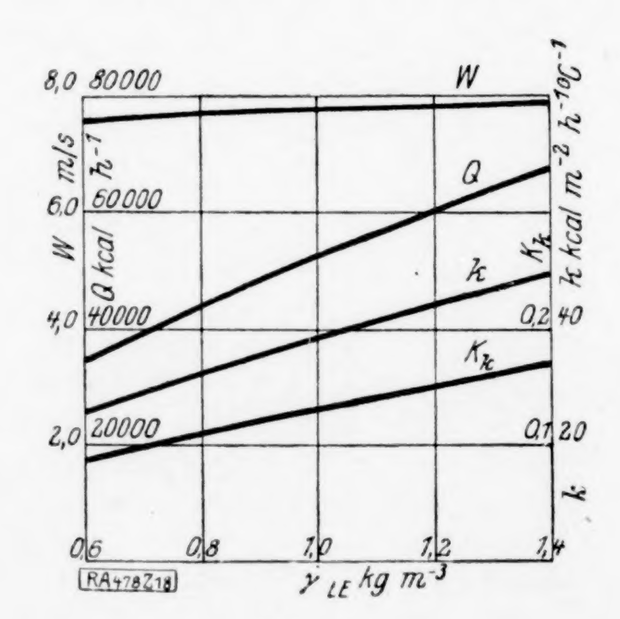


Abb. 18.

syphonkühlern allerdings, mit kleinen Umlaufmengen, muß infolgedessen mit einer verminderten Kühlwirkung gerechnet werden.

7. Den Einfluß der Luftdichte vor dem Kühler zeigt Abb. 18, wieder für den oben beschriebenen Quadratröhrchenkühler bei unveränderter Luftgeschwindigkeit, Wassermenge, Luft- und Wassertemperatur. Die übertragene Wärme nimmt angenähert linear mit steigender Dichte zu, worauf bei Flugzeugkühlern — bei denen allerdings die niedrige Lufttemperatur die Wirkung des geringen Luftdruckes teilweise ausgleicht — und Kühlern für Fahrzeuge in hochgelegenen Ländern zu achten ist.

8. Die Luft- und Wassereintrittstemperaturen sind, wie man aus den Abb. 19 und 20 für den bekannten Quadratröhrchenkühler bei unveränderter Luftgeschwindigkeit,

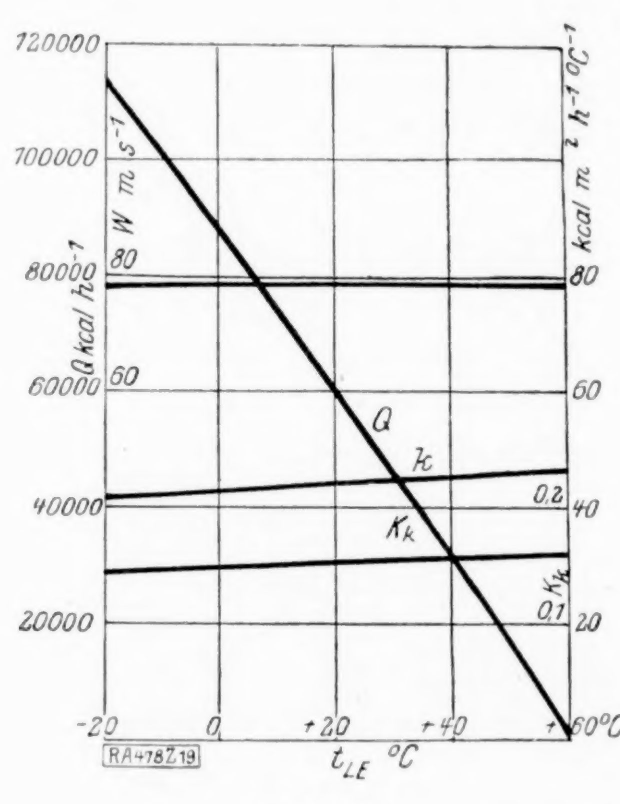


Abb. 19.

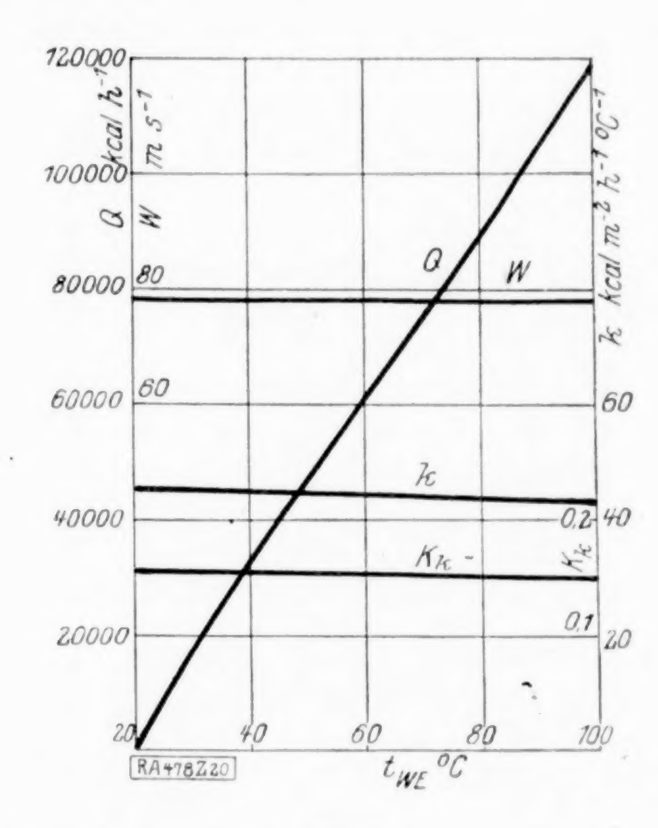


Abb. 20.

Wassermenge und Luftdichte ersieht, von geringem Einfluß auf die Charakteristik K_k, die übertragene Wärme bei sonst gleichen Verhältnissen also nahezu proportional den Differenzen der Eintrittstemperaturen.

Es konnte also gezeigt werden, daß mit den bekannten Gesetzen der Flüssigkeitsströmung und des Wärmeüberganges die Wärmeabgabe der Luftröhrchenkühler im Luftstrom überkritischer Geschwindigkeit sehr genau berechnet werden kann, daß für kurzröhrige Kühler diese Gesetze auch bei unterkritischen Geschwindigkeiten angenähert gelten, daß der Anteil der Strahlung klein ist und daß mittelbar gekühlte Flächen der praktisch vorkommenden Größenordnung fast vollkommen den unmittelbar gekühlten gleichwertig sind.

Wenn auch einzelne Fragen z. B. die Wärmeabgabe tiefer Kühler bei kleinen Luftgeschwindigkeiten und die Gesetze des Wärmeüberganges für Wasser noch weitere Klärung durch Einzeluntersuchungen erfordern und die Folgerungen eine Nachprüfung durch Versuche wünschenswert erscheinen lassen, so dürften doch die Eigenschaften des Luftröhrchenkühlers, soweit sie für seine Verwendung bekannt sein müssen, genügend dargestellt sein.

Eine spätere Untersuchung soll der Frage gelten, welche Maße der Kühler haben muß, um die vorgegebene Wärme bei geringstem Gewicht, kleinstem Luftwiderstand und niedrigsten Herstellungskosten abzuführen. 478

Die Verteilung der Kraft in einem Streifen von endlicher Breite.

Von **ERNST MELAN** in Prag.

Im folgenden soll untersucht werden, wie sich eine in der Mitte eines Streifens von endlicher Breite angreifende Kraft über die Breite des Streifens mit wachsender Entfernung vom Angriffspunkte der Kraft verteilt. Es ist dies ein Problem, das speziell im Eisenbau beim Anschluß eines Flacheisens mittels Nieten oder Schrauben an ein anderes Konstruktionselement von einiger Bedeutung ist.

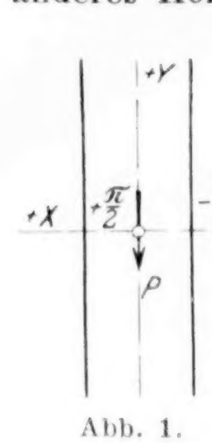


Abb. 1.

Wir formulieren unsere Aufgabe folgendermaßen: Ein Streifen von der Breite π sei durch eine in der Mittellinie und der Ebene desselben wirkende Kraft beansprucht. Die Dicke des Streifens sei verhältnismäßig klein gegenüber der Breitenabmessung, so daß wir es also mit einem ebenen Spannungszustand zu tun haben werden. Wir beziehen uns auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung wir in den Angriffspunkt der Kraft legen. Die Koordinatenachsen legen wir so, daß die Kraft in der Richtung der negativen Y-Achse wirkt (Abb. 1). Die Länge des Streifens in der Y-Richtung sei beiderseits unendlich.

Die Ränder des Streifens $x = \pm \pi/2$ müssen demnach spannungsfrei sein, d. h. es müssen hier sowohl die Normalspannungen σ_x als auch die Schubspannungen τ verschwinden.

Wir erinnern zunächst daran, daß für den Fall, daß der Streifen von unendlicher Breite ist, also für den Fall der unendlichen Ebene die Lösung bekannt ist.

Bezeichnet $f(z) = f(x + i y) = \varphi(x y) + i \psi(x y)$

eine Funktion der komplexen Variabeln $z = x + i y$ und ist

$$F(z) = \int f(z)\, dz = \Phi + i \Psi;$$

setzen wir ferner $\chi = y \Psi + U$,

worin U ein logarithmisches Potential bedeutet, so werden die Spannungen durch folgende Differentialquotienten der Funktion χ[1]), welche den Namen Airysche Spannungsfunktion führt, dargestellt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}.$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \varphi$

und weiter $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$

so erhält man

$$\sigma_x = 2\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = -y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{ y \psi + \frac{\partial U}{\partial x} \right\}.$$

Die Verschiebungen u und v parallel zur X- bzw. Y-Achse sind dann durch die Gleichungen gegeben:

$$u = \frac{1}{2G}\left[-y\psi + \frac{2m}{m+1}\Phi - \frac{\partial U}{\partial x} \right], \qquad v = \frac{1}{2G}\left[-y\varphi + \frac{m-1}{m+1}\Psi - \frac{\partial U}{\partial y} \right],$$

worin G den Schubmodul und m die Poissonsche Konstante bedeuten.

Für die unendliche Ebene ist nun

$$f(z) = i/z, \quad \text{also} \quad F = i \log z$$

zu setzen; die Funktion U ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Verschiebungen u und v eindeutig sein müssen.

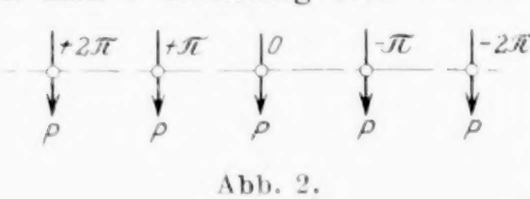


Abb. 2.

Um hiervon auf unsere Aufgabe überzugehen, wollen wir zunächst die unendliche Ebene durch unendlich viele, parallele, in den Punkten $y = 0$ und $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi$ usw. angreifende Kräfte P belasten (Abb. 2). Dann wird für $f(z)$ eine Funktion zu wählen sein, die in den Punkten

[1]) Vergleiche z. B. Love, Theorie der Elastizität oder A. u. L. Föppl, »Zwang und Drang«, Bd. I, S. 255, München 1920.

$z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi$ ebenso unendlich wird wie i/z und dies ist, wie ohne weiteres einzusehen ist, die Funktion

$$f(z) = \frac{i}{\operatorname{tg} z}.$$

Der dieser Funktion entsprechende Spannungszustand wird in allen Streifen von der Breite π der gleiche sein und, wie aus den Symmetrieverhältnissen ohne weiteres ersichtlich ist, wird die unendliche Ebene in einzelne Streifen von der Breite π zerfallen, an deren Rändern aus Symmetriegründen die Schubspannung τ verschwinden wird. Hingegen werden an diesen Rändern noch Normalspannungen σ_x auftreten.

Wir erhalten also in vorliegendem Falle

$$f(z) = \frac{i}{\operatorname{tg} z} = \varphi + i\psi = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2y}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x} + i\,\frac{\sin 2x}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x}$$

und
$$F(z) = \int \frac{i\,dz}{\operatorname{tg} z} = \Phi + i\Psi = -\operatorname{arctg} \frac{\mathfrak{Tg}\, z}{\operatorname{tg} y} + i/2 \log(\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x).$$

Die Verschiebung u wird wegen des Gliedes $-\frac{2m}{m+1}\Phi$ mehrdeutig und wir müssen sonach

$$\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{2m}{m+1}\Phi$$

setzen. U ist daher der reelle Anteil einer Funktion

$$\frac{2m}{m+1}\Omega = \frac{2m}{m+1}\int \log \sin z\, dz = U + iV$$

und es wird
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2m}{m+1}\Psi, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{2m}{m+1}\varphi.$$

Es ergeben sich also für den in Abb. 2 dargestellten Belastungszustand die folgenden Spannungen:

$$\sigma_x = 2\varphi + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{2m}{m+1}\varphi = y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2}{m+1}\varphi, \qquad \sigma_y = -y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2m}{m+1}\varphi,$$

$$\tau = -\psi - y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2m}{m+1}\psi = -y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{m-1}{m+1}\psi.$$

Mit $\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2y}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x}$ und $\psi = \frac{\sin 2x}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x}$ ergibt sich hieraus

$$\sigma_x = 2\left\{ y\,\frac{1 - \mathfrak{Cos}\, 2y \cos 2x}{(\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x)^2} + \frac{1}{m+1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\, 2y}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x} \right\},$$

$$\sigma_y = 2\left\{ -y\,\frac{1 - \mathfrak{Cos}\, 2y \cos 2x}{(\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x)^2} + \frac{m}{m+1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\, 2y}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x} \right\},$$

$$\tau = -y\,\frac{\mathfrak{Sin}\, 2y \sin 2x}{(\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x)^2} + \frac{m-1}{m+1}\,\frac{\sin 2x}{\mathfrak{Cos}\, 2y - \cos 2x}$$

und diese Ausdrücke erfüllen bereits, wie es sein muß, die Bedingung, daß für

$$x = \pm \pi/2, \qquad \tau = 0$$

wird, während hier σ_x den Wert

$$\sigma_x = 2\left\{ \frac{y}{\mathfrak{Cos}\, 2y + 1} + \frac{1}{m+1}\,\mathfrak{Tg}\, y \right\}$$

annimmt.

Es erübrigt also noch, einen Spannungszustand zu überlagern, welcher diese Randspannungen zum Verschwinden bringt.

Wir setzen zu diesem Zwecke die Spannungsfunktion in der Form

$$\chi = \int_0^\infty A(\alpha)\,[B(\alpha)\,\mathfrak{Cos}\,\alpha x - \alpha x\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x]\,\sin \alpha y\, d\alpha$$

an, wobei A und B willkürliche, passend zu bestimmende Funktionen von α sind. B bestimmen wir von vornherein so, daß τ für $x = \pm \pi/2$ Null wird und erhalten

$$\tau = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\, \partial y} = -\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\,[(B-1)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x - \alpha x\,\mathfrak{Cos}\,\alpha x]\,\cos \alpha y\, d\alpha$$

und hieraus
$$B = \frac{\alpha\pi}{2}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{\alpha\pi}{2} + 1.$$

Damit ergeben sich nunmehr die nachstehenden Ausdrücke für die Spannungen:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial x^2} = \int_0^\infty \alpha^2 A \left(\left[\frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2} - 1 \right] \operatorname{Cof} \alpha x - \alpha x \operatorname{Sin} \alpha x \right) \sin \alpha y \, d\alpha,$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial y^2} = \int_0^\infty \alpha^2 A \left(- \left[\frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2} + 1 \right] \operatorname{Cof} \alpha x + \alpha x \operatorname{Sin} \alpha x \right) \sin \alpha y \, d\alpha,$$

$$\tau = - \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial x \, \partial y} = - \int_0^\infty \alpha^2 A \left(\frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{Sin} \alpha x - \alpha x \operatorname{Cof} \alpha x \right) \cos \alpha y \, d\alpha.$$

Speziell für $x = \pm \pi/2$ muß σ_x den Wert $\sigma_x = f(y) = \frac{y}{\operatorname{Cof} 2y + 1} + \frac{1}{m+1} \operatorname{Tg} y$ annehmen, so daß also hier

$$\sigma_x = - \int_0^\infty \alpha^2 A \left[\frac{\alpha \pi}{2} \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{\alpha \pi}{2}} + \operatorname{Cof} \frac{\alpha \pi}{2} \right] \sin \alpha y \, d\alpha = f(y)$$

wird.

Die Darstellung der Funktion $f(y)$ mittels des Fourierschen Doppelintegrales ergibt aber

$$f(y) = 2/\pi \int_0^\infty \sin \alpha y \, d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \sin \alpha \lambda \, d\lambda$$

und wenn wir zur Abkürzung $\int_0^\infty f(\lambda) \sin \alpha \lambda \, d\lambda = J(\alpha)$ setzen, erhalten wir durch Vergleich der beiden Integraldarstellungen

$$A(\alpha) = - 2/\pi \frac{2 J(\alpha) \operatorname{Sin} \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha^2 (\alpha \pi + \operatorname{Sin} \alpha \pi)}.$$

Es erübrigt daher noch die Bestimmung von $J(\alpha)$.

Wir bestimmen zunächst den Wert von

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\operatorname{Cof} 2\lambda + 1} \sin \alpha \lambda \, d\lambda = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \, {}^1/_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha \lambda \, d\lambda}{\operatorname{Cof} 2\lambda + 1}.$$

Durch die Substitution $v = e^{2\lambda}$ wird das zuletzt angeschriebene Integral auf die Form

$$- {}^1/_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \, {}^1/_2 \int_0^\infty \frac{v^{+\frac{\alpha i}{2}} + v^{-\frac{\alpha i}{2}}}{(v+1)^2} \, dv = - {}^1/_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \Pi\left(\frac{\alpha i}{2}\right) \Pi\left(-\frac{\alpha i}{2}\right)$$

gebracht, wobei Π die Gammafunktion bedeutet, deren Funktionalgleichung

$$\Pi(\varkappa) \, \Pi(-\varkappa) = \varkappa \, \Pi(-\varkappa) \, \Pi(\varkappa - 1) = \frac{\varkappa \pi}{\sin \varkappa \pi}$$

lautet. Mit $\varkappa = \frac{\alpha i}{2}$ berechnet sich daher

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{\operatorname{Cof} 2\lambda + 1} \sin \alpha \lambda \, d\lambda = - {}^1/_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\frac{\alpha \pi}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{\alpha \pi}{2}} = - {}^1/_2 \, \pi/2 \, \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{\alpha \pi}{2}} \left(1 - \frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2} \right).$$

Sonach wird

$$A_1 = \frac{1 - \operatorname{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha^2 (\alpha \pi + \operatorname{Sin} \alpha \pi)}.$$

Die Entwicklung des zweiten Teiles der zu überlagernden Lösung, welche für $x = \pm \pi/2$ die Randspannungen $\sigma_x = \operatorname{Tg} y$ aufweisen soll, ist nicht ohne weiteres möglich, da das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tg} \lambda \, d\lambda$ nicht unbedingt konvergent ist. Wir umgehen diese Schwierig-

keit dadurch, daß wir zunächst die Lösung für den Fall suchen, wenn die Randspannungen für $y > 0 : \sigma_x = +1$ und für $y < 0$ $\sigma_x = -1$ werden, also die Randspannungen durch ein Integral

$$\sigma_x = 2/\pi \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{\alpha} \, d\alpha$$

darzustellen sind. Der Wert dieses Integrales ist bekanntlich für $y > 0 : +1$ und für $y < 0 : -1$.

Aus dem Vergleiche dieser Integraldarstellung mit dem Fourierschen Doppelintegral findet man

$$A_2 = -\frac{2}{\alpha \pi} \frac{2 \, \mathfrak{Sin} \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha^2 (\alpha \pi + \mathfrak{Sin}\, \alpha \pi)} .$$

Wir müssen dann noch eine weitere Lösung hinzufügen, welche für

$y > 0$ die Werte $\sigma_x = \mathfrak{Tg}\, y - 1$
und für $y < 0$ die Werte $\sigma_x = \mathfrak{Tg}\, y + 1$ ergibt.

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$J = \int_0^\infty (\mathfrak{Tg}\, \lambda - 1) \sin \alpha \lambda \, d\lambda = -\left[(\mathfrak{Tg}\, \lambda - 1) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \lambda \, d\lambda}{\alpha^2 \, \mathfrak{Cof}\, \lambda} = -1/\alpha \left[1 - \frac{\alpha \pi}{\mathfrak{Sin} \frac{\alpha \pi}{2}}\right]$$

und daraus schließlich

$$A_3 = \frac{2}{\alpha \pi} 1/\alpha^2 \frac{2\left(\mathfrak{Sin} \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{\alpha \pi}{2}\right)}{\alpha \pi + \mathfrak{Sin}\, \alpha \pi} .$$

Insgesamt haben wir für A zu setzen

$$A = A_1 + \frac{1}{m+1} (A_2 + A_3) = 1/\alpha^3 \frac{\frac{m-1}{m+1} - \frac{\alpha \pi}{2} \mathfrak{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha \pi + \mathfrak{Sin}\, \alpha \pi}$$

und sind demnach in der Lage, die Zusatzlösung in Form von bestimmten Integralen anzuschreiben.

Praktisch sind die Spannungen σ_y von dem meisten Interesse, da sich aus ihnen ein Bild über die Verteilung der Kraft über die Breite des Querschnittes gewinnen läßt. Wir erhalten

$$\sigma_y = C\left[-y \frac{1 - \mathfrak{Cof}\, 2y \cos 2x}{(\mathfrak{Cof}\, 2y - \cos 2x)^2} + \frac{m}{m+1} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2y}{\mathfrak{Cof}\, 2y - \cos 2x}\right] - \int_0^\infty \frac{\frac{m-1}{m+1} - \frac{\alpha \pi}{2} \mathfrak{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha \pi + \mathfrak{Sin}\, \alpha \pi}$$

$$\cdot \left(\left[\frac{\alpha \pi}{2} \mathfrak{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2} - 1\right] \mathfrak{Cof}\, \alpha x - \alpha x \, \mathfrak{Sin}\, \alpha x\right) \sin \alpha y \, d\alpha .$$

Um schließlich noch den Wert der Konstanten zu ermitteln, führen wir einen Schnitt parallel zur X-Achse quer durch den Streifen. Wir finden dann zunächst, daß die Spannungen σ_y, die durch das Integral dargestellt sind, keine Resultierende in der Richtung der Y-Achse ergeben, weil das Integral $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{\left(\frac{\alpha \pi}{2} \mathfrak{Cotg} \frac{\alpha \pi}{2} - 1\right) \mathfrak{Cof}\, \alpha x - \alpha x \, \mathfrak{Sin}\, \alpha x\right\} dx$ verschwindet.

Es kommen also für die Bestimmung der Resultierenden in der Y-Richtung lediglich die beiden ersten Ausdrücke in Frage, und wenn wir speziell den Schnitt im Abstande $y = +\infty$ führen, wird σ_y von x unabhängig und zwar wird:

$$\sigma_y = +C \frac{m}{m+1} .$$

Für einen Schnitt im Abstande $y = -\infty$ wird hingegen in der Richtung der negativen Y-Achse $\sigma_y = C \frac{m}{m+1}$ und daraus ersieht man, daß die im Ursprunge angreifende Kraft den Wert

$$P = C \frac{m}{m+1} 2\pi$$

bzw. die Konstante C den Wert

$$C = \frac{m+1}{2m} \frac{P}{\pi}$$

hat. Die Kraft P wird daher je zur Hälfte nach $+\infty$ als Zugkraft und nach $-\infty$ als Druckkraft geleitet.

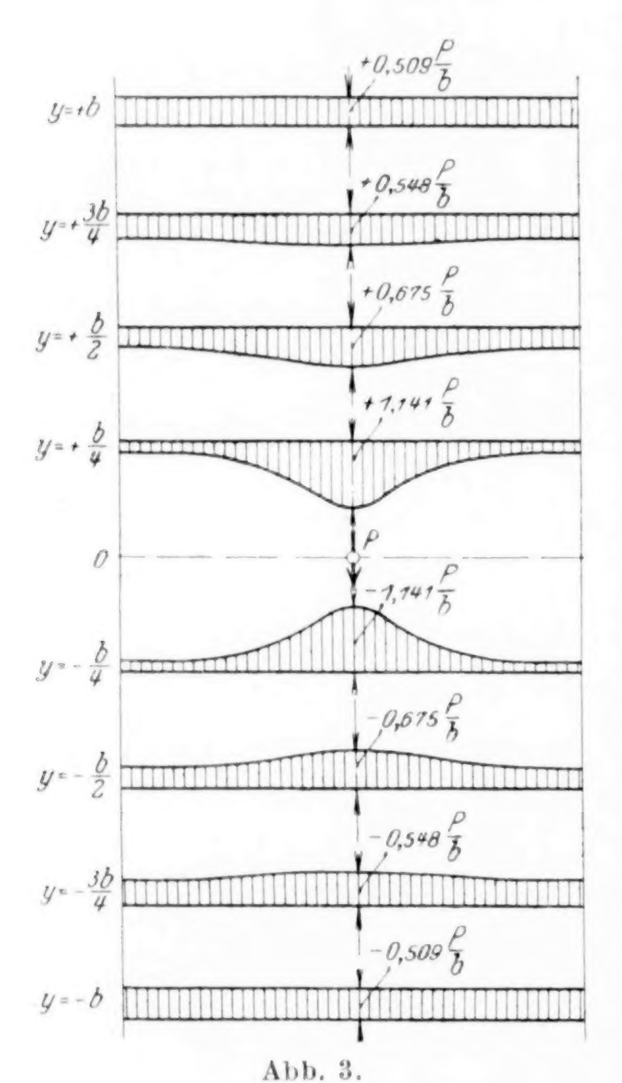


Abb. 3.

Die Spannungsverteilung, welche aus dem vorstehend abgeleiteten Ausdruck für σ_y resultiert, ist in Abb. 3 dargestellt. Bei der Berechnung des Integrales wurde so vorgegangen, daß für das Intervall von $\frac{\alpha\pi}{2} = 0$ bis $\frac{\alpha\pi}{2} = 3$ die Integration mittels der Simpsonschen Formel bewerkstelligt wurde; für das Intervall von $\frac{\alpha\pi}{2} = 3$ bis $\frac{\alpha\pi}{2} = \infty$ läßt sich die Integration, wenn man näherungsweise $\operatorname{Cotg} \lambda$ durch $1 - 2e^{-2\lambda}$ und $\operatorname{Sin} \lambda$ und $\operatorname{Cof} \lambda$ durch $\frac{1}{2}e^{\lambda}$ ersetzt, in geschlossener Form durchführen. Für σ_y ist übrigens der Beitrag, welchen das Integral liefert, gering; er beträgt für die Mittelfaser $(x = 0)$ im Maximum etwa 6 %. Aus der Spannungsverteilung, welche für Querschnitte im Abstande $y = b/4$, $b/2$, $^3/_4 b$ und b berechnet wurde, ersieht man, wie rasch sich die Kraft über den ganzen Querschnitt des Streifens gleichmäßig verteilt. Im Abstande $y = \pm b$ z. B. ist die maximale Spannung nur mehr um 1,8 % größer als der Durchschnittswert der Spannungen.

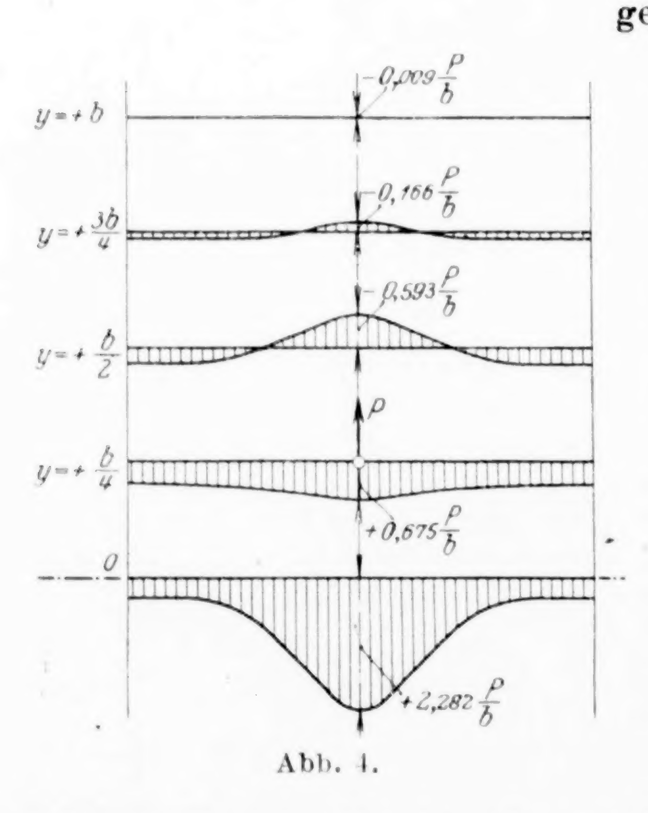


Abb. 4.

Durch entsprechendes Uebereinanderlagern der gefundenen Lösung bei verschiedenen Lagen des Kraftangriffspunktes lassen sich übrigens unschwer weitere technisch interessante Fälle erledigen. So ist z. B. in Abb. 4 die Verteilung der Spannungen in einem Streifen dargestellt, welcher durch zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte, die in einem Abstande gleich der halben Streifenbreite voneinander entfernt in der Stabachse angreifen, beansprucht ist. Der Streifen erstreckt sich naturgemäß beiderseits ins Unendliche. Da jedoch bereits in einer Entfernung gleich der Breite des Streifens vom Kraftangriffspunkt nach außen die Spannung in der mittleren Faser nur mehr etwa 1 % des von P/b beträgt, wird man keinen nennenswerten Fehler begehen, wenn man die Spannungsverteilung auch für einen Stab von endlicher Länge, der mindestens um Streifenbreite über den Angriffspunkt der Kräfte hinausragt, gelten läßt. Zu einem ähnlichen Resultat kommt man, wenn man die Entfernung der Angriffspunkte der beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte größer wählt. Wenn dieselbe mindestens die doppelte Streifenbreite beträgt, kann man mit einem Fehler von weniger als 1,8 %, die Spannung im Abstande gleich der Streifenbreite vom Kraftangriffspunkt bereits gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt annehmen.

Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator.

Von **STEPHAN BERGMANN** in Berlin.[1])

Der normale Einphasentransformator der Kerntype besteht aus einem mit Kupferdraht umwickelten Eisenkörper von der in Abb. 1 angegebenen Gestalt. Fließt in der Wicklung ein elektrischer Strom, so entsteht im Eisen ein magnetisches Feld. Der Zweck der folgenden Arbeit ist es, ein Verfahren zu besprechen, das zur Berechnung dieses Feldes dient und zwar unter folgenden vereinfachenden Annahmen:

1. daß der Transformator sich in der Tiefenrichtung beiderseits ins Unendliche erstreckt ($h = \infty$);
2. daß die Permeabilität des Eisens konstant (unabhängig von der Feldstärke) und unendlich groß im Vergleich zur Permeabilität der Luft ist.

Infolge dieser Annahmen reduziert sich das ursprünglich dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales und die Aufgabe, die Kraftlinien und die Niveauflächen des magnetischen Feldes zu berechnen, wird (was wir aus der mathematischen Physik als bekannt voraussetzen) äquivalent einem Problem der Theorie der konformen Abbildung; in unserem Falle der Aufgabe, das Rechteck R in Abb. 2 auf das Gebiet G (Abb. 3)

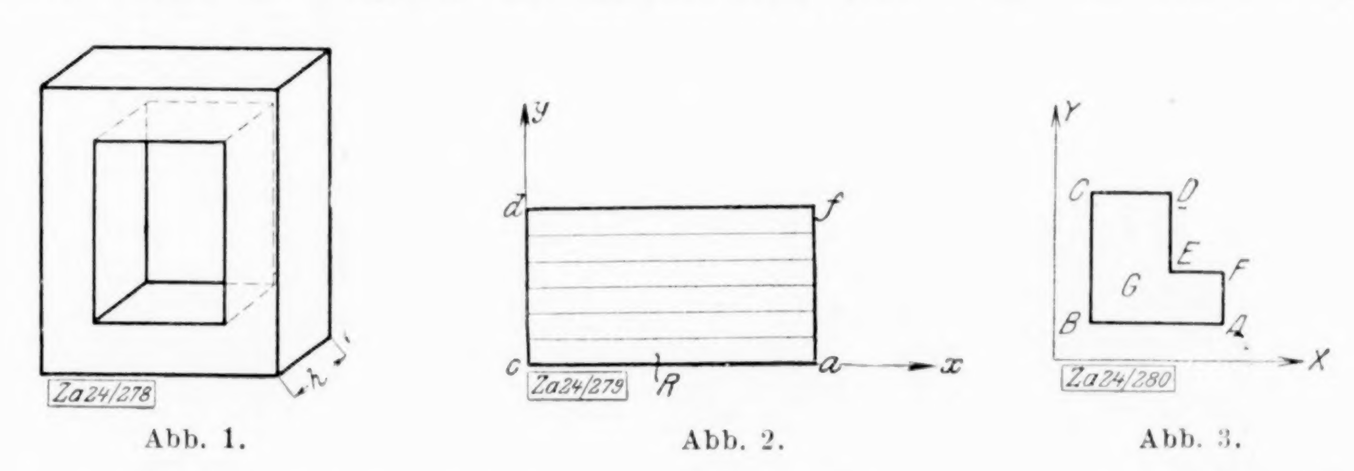


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

konform abzubilden, wobei die Punkte a, c, d, f in die Punkte A, C, D, F übergehen müssen. Die zur x-Achse parallelen Geraden im Rechtecke werden dabei in die Kraftlinien des magnetischen Feldes im Transformator übergeführt.

Anstatt direkt die Abbildung von R auf G vorzunehmen, bilden wir R zuerst auf die obere Halbebene H ab, was mit Hilfe der Funktion *snam* geschieht, und dann erst H auf G.

Nach H. A. Schwarz läßt sich die Abbildungsfunktion der oberen Halbebene auf einen polygonalen Bereich G durch das Integral $J(z) = \int_0^z dz\,(z-z_1)^{r_1}(z-z_2)^{r_2}\ldots(z-z_n)^{r_n}$ darstellen, wo die $z_\varkappa$ diejenigen Punkte der reellen Achse, die den Ecken von G entsprechen, und die $r_\varkappa$ die zugehörigen Außenwinkel sind. Im Falle eines Treppenbereiches (der hier vorliegt) reduziert sich J auf ein hyperelliptisches Integral. Aber die Berechnung der $z_\varkappa$ aus den gegebenen Seitenlängen des Bereiches G und die Auswertung des Integrals J bietet die eigentlichen Schwierigkeiten. Wir zeigen nun im § 1, daß man J durch einen Ausdruck J', der eine Summe von rationalen und logarithmischen Funktionen und elliptischen Integralen ist, approximieren kann. Wir besprechen weiter den Weg, wie man bei vorgegebenem Gebiete G den Approximationsausdruck J' gewinnen kann. Im Gegensatz zu dem Integral J, das 3 wesentliche Konstanten enthält und die allgemeine Form der Abbildungsfunktion liefert, gibt es jedoch keine allgemeine Gestalt für J'. Wir erhalten vielmehr je nach dem Grade der gewünschten Annäherung verschiedene Funktionen J', von denen jede nur 2 Konstanten enthält. Dementsprechend liefert ein

[1]) Ich möchte die Gelegenheit wahrnehmen, meinem Freunde Herrn Dr. E. J. Gumbel in Heidelberg für mannigfaltige Ratschläge bei dieser Arbeit zu danken. Der Verfasser.

Da der Verf. nicht erreichbar ist, hat Hr. Dr. Gumbel auch die Besorgung der Korrektur freundlicherweise übernommen. Der Herausgeber.

bestimmtes J' die Abbildungsfunktion für den Bereich G nur dann, wenn zwischen den Seitenlängen des Bereiches eine gewisse Beziehung besteht. Unsere Lösung besteht darin, daß wir eine genügend große Anzahl von J' aufstellen, die besprochenen Beziehungen zwischen den Seitenlängen feststellen und die darin noch vorhandenen Konstanten bestimmen. In der vorliegenden Arbeit ist die einfachste Form von J' besprochen. Anschließend an den ersten erwähnten Fall wird an Hand eines Beispieles die Aufgabe der Auswertung des elliptischen Integrales in J' behandelt, die mit Hilfe von Zahlentafeln für elliptische Integrale und einfachen Zahlenrechnungen erfolgt.

Dieselbe Frage der Abbildung der oberen Halbebene auf den in Abb. 3 angegebenen Bereich kommt auch in anderen technischen Gebieten vor. Genannt sei nur das Problem der Schubspannungen in Balken mit den in Abb. 4 angegebenen Querschnitten.

1. Die theoretischen Grundlagen. Im folgenden soll ein Verfahren beschrieben werden, das zur Bestimmung derjenigen harmonischen Funktion U dient, die in dem in Abb. 5 angegebenen Gebiete harmonisch ist und auf beiden Berandungslinien konstante Werte annimmt. Diese Aufgabe ist mit folgender identisch: Es ist eine Funktion U zu bestimmen, die in dem in Abb. 3 angegebenen Gebiete G regulärharmonisch ist, längs der Linien ABC und FED konstant ist und deren Niveaulinien die Geraden AF und DC unter rechtem Winkel schneiden. Durch entsprechende Spiegelung des Gebietes $ABCDEF$ an der x- bzw. y-Achse gelangen wir zu dem in Abb. 5 angegebenen Gebiet. Die Funktion U ist also die gesuchte Lösung.

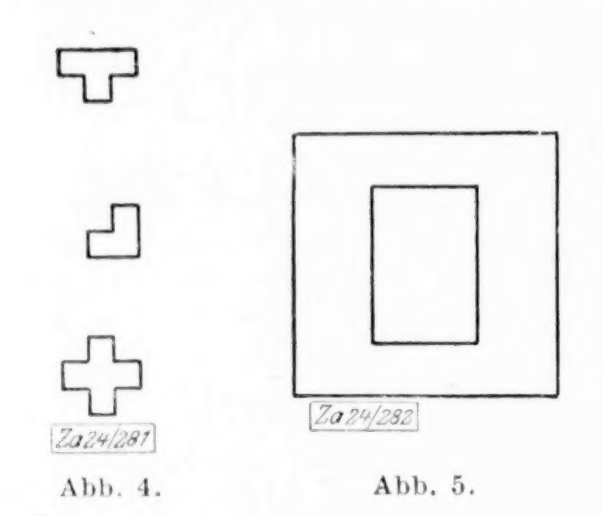


Abb. 4. Abb. 5.

Um u zu bestimmen, bedienen wir uns eines Verfahrens, das in der Funktionentheorie unter dem Namen konforme Abbildung bekannt ist. Es gibt bekanntlich Gebiete, für die die Lösung von Randwertaufgaben, also die Aufstellung einer Funktion, die im Inneren des betreffenden Gebietes harmonisch ist und auf der Berandung teils vorgegebene Werte annimmt, teils anderen linearen Bedingungen genügt, bedeutend einfacher ist als in dem ursprünglichen Gebiete G. Durch konforme Abbildung eines Gebietes auf das andere gehen:

1. die Randlinien des ersten Gebietes im allgemeinen in die Randlinien des zweiten über,
2. die Niveaulinien einer in dem ersten Gebiete harmonischen Funktion in die Niveaulinien einer in dem zweiten Gebiete harmonischen Funktion.
3. Es bleiben die Winkel, unter denen 2 Kurven sich schneiden, erhalten (außer in einzelnen Punkten).

Kennt man die Lösung der betreffenden Randwertaufgabe für ein Gebiet R und dasjenige Funktionenpaar $X(x,y)$, $Y(x,y)$, das das Gebiet R auf das Gebiet G konform abbildet, so ist die Randwertaufgabe auf Grund der angegebenen Eigenschaften der konformen Abbildung auch für das Gebiet G gelöst.

Nehmen wir in unserem Falle als Ausgangsgebiet R ein Rechteck, so ist die Lösung unserer Aufgabe $U = x$. Die äußersten Niveaulinien dieser Funktion fallen mit den Seiten ca und df zusammen und sämtliche Niveaulinien schneiden die Randlinien cd und af unter einem rechten Winkel. Unsere ursprüngliche Aufgabe reduziert sich somit auf die Auffindung des Funktionenpaares $X(x,y)$ und $Y(x,y)$, das das Gebiet R auf unser Gebiet G konform abbildet, wobei die Punkte a in A, f in F, d in D und c in C übergehen. Durch diese letzte Forderung wird das Seitenverhältnis des Rechteckes durch das Gebiet G eindeutig bestimmt. Die Linien $x =$ konst. gehen dann in die Niveaulinien der gesuchten Funktion U über.

Ein grundlegender Satz der Funktionentheorie besagt, daß der reelle Teil $X(x,y) = \Re(f(z))$ und der imaginäre Teil $Y(x,y) = J(f(z))$ einer analytischen Funktion $f(z) = X + iY$ einer komplexen Variablen $z = x + iy$ die xy-Ebene (innerhalb des Definitionsbereiches von $f(z)$) auf ein Gebiet der XY-Ebene im allgemeinen konform abbildet. Nach einem zweiten grundlegenden Satze ist es möglich, zu zwei gegebenen einfachzusammenhängenden Gebieten R (der z-Ebene) und G (der f-Ebene) stets eine analytische Funktion $f(z)$ herzustellen, durch deren reellen und imaginären Teil das Gebiet R auf G abgebildet wird [1].

[1] Vergl. dazu etwa L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung, »Sammlung Göschen«, §§ 1 u. 17 oder andere Lehrbücher der Funktionentheorie.

Wir wollen entsprechend dem Gesagten eine Funktion einer komplexen Veränderlichen z finden, die den Bereich R auf G abbildet. Aus rechnerischen Gründen werden wir die eben erwähnte Funktion nicht direkt berechnen, sondern wir schalten in unsere Betrachtung ein drittes Gebiet — die obere Halbebene H — ein und wollen zwei analytische Funktionen bestimmen, von denen die erste R auf H, die zweite H auf G abbildet.

Aus der Theorie der elliptischen Funktionen ist es bekannt, daß das Rechteck R durch die Funktion $snam$ auf die obere Halbebene abgebildet wird; ferner wird nach H. A. Schwarz die Abbildung der oberen Halbebene auf ein polygonales Gebiet durch das Integral

$$\int_0^z (z_1 - z)^{r_1} (z_2 - z)^{r_2} \ldots (z_n - z)^{r_n} \, dz \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

geleistet. Die Konstanten z_k sind dabei diejenigen Punkte der reellen Achse (Verzweigungspunkte des Integrales), die den Eckpunkten von G entsprechen und die $r_\varkappa$ die entsprechenden Außenwinkel des polygonalen Bereiches[1]).

In unserem Falle, wo der Bereich G nur rechte Winkel aufweist, ist $-\pi r_\varkappa$ entweder $^1/_2\,\pi$ oder $^3/_2\,\pi$. Unter dem Integralzeichen treten somit nur Quadratwurzeln auf. Ein solches Integral heißt ein hyperelliptisches. In diesem Integral treten in unserem Falle 3 unbekannte Konstanten auf. Es entsprechen nämlich den 6 Eckpunkten von G 6 Verzweigungspunkte von J, von denen wir 3 beliebig festsetzen können, etwa in den Punkten 0, 1 und ∞. Trotz der Einfachheit der Darstellung der Abbildungsfunktionen der Form (1) bietet die weitere Durchführung der Aufgabe Schwierigkeiten zweifacher Art:

I. Wenn die Dimensionen des Bereiches G (auf dem wir H abbilden) gegeben sind, ist die Bestimmung der in (1) auftretenden Konstanten $z_\varkappa$ äußerst schwierig[2]).

II. Auch wenn die Konstanten bekannt sind, führt die tatsächliche Auswertung des Integrals (1) für jeden Wert von $z = x + iy$ auf eine umfangreiche Approximationsrechnung. Im allgemeinen muß man eine ganze Reihe von Punkten $z_\varkappa$ übertragen. Dies verursacht einen solchen Aufwand von rechnerischer Arbeit, daß man zu anderen Methoden greifen muß, um schneller zum Ziele zu kommen. Eine Methode, die dies ermöglicht, wollen wir besprechen.

Der Hauptgedanke unseres Verfahrens stützt sich auf folgende Tatsachen. Es ist bekannt, daß ein hyperelliptisches Integral unter Umständen sich auf elliptische Integrale reduzieren läßt. Die Berechnung von elliptischen Integralen läßt sich (wie wir noch zeigen werden) mit Hilfe bestimmter Tafeln verhältnismäßig leicht bewerkstelligen. Wir werden nun zeigen, daß man jedes hyperelliptische Integral durch ein reduzierbares approximieren kann.

Ein bekannter Abelscher Satz lautet: Wird das hyperelliptische Integral erster Gattung $\int_0^z F(z, s)\, dz$ mit $s^2 = \varphi(z)$ durch eine Substitution

$$\xi = \Phi(z, s) \; \sqrt{\xi (1 - \xi)(1 - c^2 \xi)} = \psi(z, s) \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

wo $\Phi(z, s)$ und $\psi(z, s)$ rationale Funktionen von z und s sind, auf das elliptische Integral $\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi (1-\xi)(1 - c^2 \xi)}}$ reduziert, so setzen sich seine zwei $2p$ Periodizitätsmoduln ω_α $(\alpha = 1, 2 \ldots, 2p)$ aus den beiden Periodizitätsmoduln v_1 und v_2 dieses letzteren in der Form

$$\omega_\alpha = m_{\alpha_1} v_1 + m_{\alpha_2} v_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

zusammen, wo die m ganze Zahlen bezeichnen. Setzen sich umgekehrt die zwei Periodizitätsmodulen ω_α eines hyperelliptischen Integrals aus zwei Größen v_1, v_2 in der Form (3) zusammen, so ist dasselbe stets durch eine Substitution von der Form (2) auf ein elliptisches Integral reduzierbar[3]).

[1]) Vergl. H. A. Schwarz, »Ueber einige Abbildungsaufgaben«, ges. Werke, Bd. II, S. 64 bis 83 oder Study und Blaschke, »Vorlesungen über ausgew. Gegenstände der Geometrie«, Heft II, §§ 9, 10.

[2]) Vergl. A. Weinstein, Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone. Mathematische Zeitschrift Bd. 21, 1924, S. 72—84.

[3]) Vergl. Appell und Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris 1895, S. 368; oder Kratzer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, S. 471.

Andererseits lassen sich zu jeder Folge von komplexen Zahlen ω_α $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ zwei Zahlen v_1 und v_2 so bestimmen, daß

$$|\omega_\alpha - m_{\alpha_1}, v_1 - m_{\alpha_2} v_2| < \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

ist, wo ε eine vorgegebene kleine Zahl ist und die $m_{\alpha_{1,2}}$ ganze rationale Zahlen bedeuten.

Wie aus bekannten, hier nicht näher zu streifenden Ueberlegungen hervorgeht, sind die Seitenlängen des Bereiches G nichts anderes als die Periodizitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals. Aus dem Abelschen Satz folgt:

Zu jedem Bereich G kann man einen Bereich G' konstruieren, der folgende Eigenschaften hat:

1. Die Seitenlängen von G' sind beliebig wenig von den Seitenlängen des ursprünglichen Bereiches G verschieden.

2. Diejenige Funktion $J'(z)$, die die obere Halbebene auf G' abbildet, läßt sich auf ein elliptisches Integral reduzieren.

Wir gehen nunmehr zu der Frage über, wie man das gesuchte Integral J' und die fraglichen Substitutionen (2) zum vorgegebenen Bereich G bestimmen kann.

Unser Gebiet G hat vier Seiten, deren Längen voneinander unabhängig sind. Da man noch eine Seitenlänge — durch entsprechende Festsetzung des Maßstabes — gleich eins setzen kann, so besitzt der Bereich 3 Parameter, von denen die Abbildungsfunktion wesentlich abhängt. Dementsprechend besitzt das Integral J drei Konstanten. Im Falle, daß J sich reduzieren läßt, bestehen zwischen diesen Konstanten eine oder zwei Gleichungen. Es lassen sich dann zwischen den Seitenlängen eines Bereiches G', der auf ein reduzierbares Integral J' führt, eine bezw. zwei Beziehungen aufstellen. Es wäre das nächstliegende, eine allgemeine Beziehung zwischen den Seitenlängen des Bereiches G, die sich auf alle J' bezieht, anzugeben, die eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür wäre, daß sich die erhaltenen J überhaupt reduzieren, und aus welcher wir zugleich auf die Form der Beziehungen zwischen den Konstanten des Integrals schließen könnten. Es ist aber leider im allgemeinen unmöglich, eine Beziehung dieser Art aufzustellen. Wir werden deshalb eine Anzahl von solchen Integralen J' aufstellen müssen und in jedem einzelnen Falle die fraglichen Beziehungen berechnen. Ist uns nun ein Bereich G vorgelegt, so werden wir (in einer im weiteren auseinandergesetzten Weise) feststellen müssen, welcher der Bereiche G' ihm »am nächsten liegt« (im Sinne der Beziehung (4)). Dann ersetzen wir G durch G'. Da die Abbildungsfunktion J' sich dann in Form eines elliptischen Integrals darstellen läßt, so bietet die Ausrechnung der zwei übrig bleibenden Konstanten bzw. die Auswertung des Integrals keine Schwierigkeiten.

Sind uns die Konstanten des Integrals, d. h. die Verzweigungspunkte bekannt, so müssen wir noch das Seitenverhältnis $\frac{af}{ac}$ von R berechnen. Dieses Verhältnis ist durch den zweifach zusammenhängenden Bereich (Abb. 5) eindeutig bestimmt. (Es ist eine Funktion des sogenannten Moduls des zweifach zusammenhängenden Bereiches.) Bei der konformen Abbildung darf man 3 Punkte der Berandung in 3 beliebige Randpunkte des zweiten Bereiches überführen. Nach unserer Forderung (vergl. S. 320) sollen aber 4 Punkte a, b, c, d in diejenigen Punkte der reellen Achse überführt werden, die den Punkten A, F, D, C von G entsprechen. Wir bezeichnen diese Punkte — die uns jetzt bekannt sind — mit A', F', D', C'. Da die obere Halbebene umgekehrt auf R durch ein elliptisches Integral abgebildet wird, so sind die Seiten $\overline{ac}$ und $\overline{cd}$ von R die Perioden eines Integrals mit den Verzweigungspunkten in A', F', D', C. Man kann somit das Verhältnis $\frac{ac}{cd}$ leicht bestimmen.

Es werden hier nicht nur die auf ein elliptisches Integral, sondern allgemeiner die auf eine Summe von elliptischen Integralen reduzierbaren Integrale betrachtet.

Wir wenden uns nunmehr dem einfachsten, dem sogenannten Legendre-Jacobischen Fall zu.

2. Die Legendre-Jacobische Transformation. In diesem Abschnitt soll die von Legendre und Jacobi stammende Reduktion des hyperelliptischen Integrals (1) abgeleitet und besprochen werden[1]. Führen wir im Integral

[1] Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. I.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)}} \quad \text{wobei } \varkappa \text{ und } \lambda \text{ reell und } \lambda < \varkappa < 1 \qquad (1)$$

eine neue Veränderliche

$$p = \frac{1+\varkappa\lambda x^2}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ein, so geht es in

$$-\,{}^1/_2\left[\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\sqrt{[p+2\sqrt{\varkappa\lambda}][p-(1+\varkappa\lambda)][p+(\lambda+\varkappa)]}} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\sqrt{(p-2\sqrt{\varkappa\lambda})[p-(1+\varkappa\lambda)][p+(\lambda+\varkappa)]}}\right] \quad (3)$$

über. Denn es ist

$$(1-x)(1+\lambda x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x) = 1 + (-1+\lambda+\varkappa-\varkappa\lambda)x$$
$$+ (-\lambda+\varkappa\lambda-\varkappa+\varkappa\lambda-\varkappa\lambda^2)x^2 + (\varkappa\lambda^2-\lambda\varkappa+\varkappa^2\lambda-\lambda^2\varkappa^2)x^3 + \varkappa^2\lambda^2 x^4 \quad . \quad (4).$$

Da
$$x^2p^2 = 1 + 2\varkappa\lambda x^2 + \varkappa^2\lambda^2 x^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist, so geht der Ausdruck (4), nachdem wir (5) einsetzen und die Koeffizienten von x und x^3 zusammenfassen, in

$$(-1+\lambda+\varkappa-\varkappa\lambda)(1+\varkappa\lambda x^2)x + (p^2-2\varkappa\lambda-\lambda+2\varkappa\lambda-\varkappa-\varkappa\lambda^2-\varkappa^2\lambda)x^2$$
$$= (-1+\lambda+\varkappa-\varkappa\lambda)px^2 + (p^2-\lambda-\varkappa-\varkappa\lambda^2-\varkappa^2\lambda)^2$$
$$= x^2[p^2+p(-1-\varkappa\lambda+\lambda+\varkappa)-(\lambda+\varkappa+\varkappa\lambda^2+\varkappa^2\lambda)] = x^2[p-(1+\varkappa\lambda)][p+(\lambda+\varkappa)]$$

über. Somit ist

$$(1-x)(1+\lambda x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x) = x^2[p-(1+\varkappa\lambda)][p+(\lambda+\varkappa)] \quad . \quad . \quad (6).$$

Andererseits ist $xp = 1+\varkappa\lambda x^2$ oder

$$x(p+2\sqrt{\varkappa\lambda}) = (1+\sqrt{\varkappa\lambda}\,x)^2; \quad x(p-2\sqrt{\varkappa\lambda}) = (1-\sqrt{\varkappa\lambda}\,x)^2$$

und
$$x^{1/2}\sqrt{p+2\sqrt{\varkappa\lambda}} = 1+\sqrt{\varkappa\lambda}\,x; \quad x^{1/2}\sqrt{p-2\sqrt{\varkappa\lambda}} = 1-\sqrt{\varkappa\lambda}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Addieren wir die beiden Formeln (7) und bringen $x^{1/2}$ auf die andere Seite, so erhalten wir $2x^{1/2} = \sqrt{p+2\sqrt{\varkappa\lambda}} + \sqrt{p-2\sqrt{\varkappa\lambda}}$. Durch Differentiation dieses Ausdruckes nach x erhalten wir

$$-\frac{dx}{x\sqrt{x}} = {}^1/_2\left[\frac{dp}{\sqrt{p+2\sqrt{\varkappa\lambda}}} + \frac{dp}{\sqrt{p-2\sqrt{\varkappa\lambda}}}\right] \text{ oder } dx = -\frac{x\sqrt{x}}{2}\left[\frac{dp}{\sqrt{p+2\sqrt{\varkappa\lambda}}} + \frac{dp}{\sqrt{p-2\sqrt{\varkappa\lambda}}}\right] \quad (8).$$

Mit Benutzung von (6) und (8) erhalten wir aus (1) durch die Transformation (2) den Ausdruck (3).

Wir wollen noch die beiden Integrale in der Formel (3) auf die Legendresche Normalform reduzieren. Wir führen im ersten bezw. zweiten Integral eine neue Substitution

$$z^2 = \frac{p-(1+\varkappa\lambda)}{p-2\sqrt{\varkappa\lambda}} \text{ und } t^2 = \frac{p-(1+\varkappa\lambda)}{p+2\sqrt{\varkappa\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ein. Dann geht (3) über in

$$^1/_2\left[\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K_1^2z^2)}} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-K_2^2t^2)}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wo
$$K_1^2 = \frac{(\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda})^2}{(1+\varkappa)(1+\lambda)} \text{ und } K_2^2 = \frac{(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})^2}{(1+\varkappa)(1+\lambda)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist. Umgekehrt ist

$$p = \frac{(1+\varkappa\lambda)+2\sqrt{\varkappa\lambda}\,z^2}{1-z^2}.$$

Das Integral J in (1) reduziert sich somit auf $J' = (10)$. Wir müssen noch untersuchen, in welche Kurven die reelle Achse der x-Ebene bei unseren Substitutionen übergeht, damit wir den Zusammenhang zwischen den Periodizitätsmodulen von J (Seitenlängen des Bereiches) und den Periodizitätsmodulen K_1 und $K_1'i$ bezw K_2 und $K_2'i$ des ersten bezw. zweiten Integrals in (10) feststellen.

Zahlen

x	p	z
auf der reellen Achse von 0 bis 1	auf der reellen Achse von ∞ bis $(1+\varkappa\lambda)$	auf der reellen Achse von 1 bis 0
auf der reellen Achse von 1 bis $\frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda}}$	auf der reellen Achse von $(1+\varkappa\lambda)$ bis $2\sqrt{\varkappa\lambda}$	auf der imaginären Achse von 0 bis ∞
auf der reellen Achse von $\frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda}}$ bis $\frac{1}{\varkappa\lambda}$	auf der reellen Achse von $2\sqrt{\varkappa\lambda}$ bis $(1+\varkappa\lambda)$	auf der imaginären Achse von ∞ bis 0
auf der reellen Achse von $\frac{1}{\varkappa\lambda}$ bis ∞	auf der reellen Achse von $(1+\varkappa\lambda)$ bis ∞	auf der reellen Achse von 0 bis 1
auf der reellen Achse von $-\infty$ bis $-\frac{1}{\varkappa}$	auf der reellen Achse von ∞ bis $-(\varkappa+\lambda)$	auf der reellen Achse von 1 bis $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda})}$
auf der reellen Achse von $-\frac{1}{\varkappa}$ bis $-\frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda}}$	auf der reellen Achse von $-(\varkappa+\lambda)$ bis $-2\sqrt{\varkappa\lambda}$	auf der reellen Achse von $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda})}$ bis * [1])
auf der reellen Achse von $-\frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda}}$ bis $-\frac{1}{\lambda}$	auf der reellen Achse von $-2\sqrt{\varkappa\lambda}$ bis $-(\varkappa+\lambda)$	auf der reellen Achse von * bis $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda})}$
auf der reellen Achse von $-\frac{1}{\lambda}$ bis 0	auf der reellen Achse von $-(\varkappa+\lambda)$ bis ∞	auf der reellen Achse von $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda})}$ bis 1

In der Zahlentafel I sind die Bahnen zusammengestellt, in die ein Punkt in den Ebenen p, z, t, w_1, w_2, w überführt wird, falls sich der entsprechende Punkt x in der x-Ebene längs der reellen Achse bewegt.

Die Abbildung der p- auf die x-Ebene ist zweideutig, und durch die Substitution (2) wird die x-Ebene auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit den Verzweigungspunkten in $2\sqrt{\varkappa\lambda}$ und in $-2\sqrt{\varkappa\lambda}$ abgebildet. Die Funktionen w_1 und w_2 sind unendlich vieldeutig, den zwei verschiedenen Blättern in der z- (bezw. in der t-) Ebene entsprechen zwei verschiedene Zweige von w_1 (bezw. w_2).

Bezeichnen wir mit α eine (vorläufig unbestimmte) Konstante, so ersehen wir aus unserer Zahlentafel I, daß die Seitenlänge

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \alpha(K_1+K_2) & \overline{BC} &= (K_1'+K_2')\alpha \\ \overline{CD} &= 2K_2\alpha & \overline{DE} &= (K_1'-K_2')\alpha \\ \overline{FE} &= (K_1-K_2)\alpha & \overline{FA} &= 2K_1'\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (12)$$

[1]) Wir haben einige Punkte nicht ausgerechnet, da sie für uns ohne Interesse sind.

Tafel I.

t	w_1	w_2	w
auf der reellen Achse von 1 bis 0	parallel zur reellen Achse von $K_1+2K_1'i$ bis $2K_1'i$	auf der reellen Achse von $-K_2$ bis 0	parallel zur reellen Achse von $(K_1-K_2)+2K_1'i$ bis $2K_1'i$
auf der imaginären Achse von 0 bis * [1])	auf der imaginären Achse von $2K_1'i$ bis $K_1'i$	auf der imaginären Achse von 0 bis *	auf der imaginären Achse von $2K_1'i$ bis *
auf der imaginären Achse von * bis 0	auf der imaginären Achse von $K_1'i$ bis 0	auf der imaginären Achse von * bis 0 (zurück)	auf der imaginären Achse von * bis 0
auf der reellen Achse von 0 bis 1	auf der reellen Achse von 0 bis K_1	auf der reellen Achse von 0 bis K_2	auf der reellen Achse von 0 bis (K_1+K_2)
auf der reellen Achse von 1 bis $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})}$	parallel zur imaginären Achse von K_1 bis $K_1+K_1'i$	parallel zur imaginären Achse von K_2 bis $K_2+K_2'i$	parallel zur imaginären Achse von (K_1+K_2) bis $(K_1+K_2)+(K_1'+K_2')i$
auf der reellen Achse von $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})}$ bis ∞	parallel zur reellen Achse von $K_1+K_1'i$ bis *	parallel zur reellen Achse von $K_2+K_2'i$ bis $K_2'i$	parallel zur reellen Achse von $(K_1+K_2)+(K_1'+K_2')i$ bis *
auf der reellen Achse von ∞ bis $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\varkappa)}}{(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})}$	parallel zur reellen Achse von * bis $K_1+K_1'i$ (zurück)	parallel zur reellen Achse von $K_2'i$ bis $-K_2+K_2'i$	parallel zur reellen Achse von * bis $(K_1-K_2)+(K_1'+K_2')i$
auf der reellen Achse von $\frac{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}{(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})}$ bis 1	parallel zur imaginären Achse von $K_1+K_1'i$ bis $K_1+2K_1'i$	parallel zur imaginären Achse von $-K_2+K_2'i$ bis $-K_2$	parallel zur imaginären Achse von $(K_1-K_2)+(K_1'+K_2')i$ bis $(K_1-K_2)+2K_1'$

ist. Die Länge einer Strecke wird dabei durch einen Strich bezeichnet.

Das System (12) liefert vier voneinander linear unabhängige Gleichungen. Da aber durch den Wert von $\frac{K_1}{K_1'}$ sowohl K_1 wie K_1' eindeutig bestimmt ist (bezw. K_2 und K_2' aus $\frac{K_2}{K_2'}$), so sind in diesen 4 Gleichungen nur 3 Unbekannte enthalten und wir erhalten aus (12)

$$\frac{K_1}{K_1'} = 2 - \frac{\overline{AB} - \frac{\overline{CD}}{2}}{\overline{AF}} \quad \text{und} \quad \frac{K_2}{K_2'} = {}^1/_2\, \frac{\overline{DC}}{\overline{BC} - \frac{\overline{AF}}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Daraus können wir K_1, K_1' und K_2, K_2' berechnen; hierauf kann α aus zwei verschiedenen Gleichungen bestimmt werden. Die notwendige und hinreichende

[1]) Wir haben einige Punkte nicht ausgerechnet, da sie für uns ohne Interesse sind.

Zahlentafel II. Die Werte der

Linie	$u =$	0	0,163	0,324	0,486	0,648
	v					
0	0	0	0,163	0,318	0,465	0,599
1	0,250	0,250 i	0,166 + 0,250 i	0,327 + 0,239 i	0,482 + 0,222 i	0,619 + 0,198 i
2	0.501	0,525 i	0,180 + 0,515 i	0,363 + 0,492 i	0,530 + 0,457 i	0.666 + 0,406 i
3	0,751	0,838 i	0,217 + 0,822 i	0,426 + 0,784 i	0,620 + 0,718 i	0,789 + 0,636 i
4	1,002	1,216 i	0,276 + 1,170 i	0,533 + 1,105 i	0,767 + 0,980 i	0,961 + 0,877 i
5	1,252	1,70 i	0,325 + 1,681 i	0,705 + 1,571 i	1,008 + 1,408 i	1,23 + 1,195 i
6	1,503	2,393 i	0,535 + 2,32 i	0,999 + 2,116 i	1,36 + 1,782 i	1,62 + 1,51 i
7	1,753	3,500 i	0,882 + 3,22 i	1,577 + 2,88 i	2,018 + 2,28 i	2,246 + 1,81 i
8	2,004	5,524 i	1.815 + 4,972 i	2,852 + 3,820 i	3,201 + 2,655 i	3,201 + 1,890 i
9	2,254	11,675 i	5,468 + 8,138 i	5,840 + 4,251 i	5,028 + 2,268 i	4,289 + 1,376 i
10	2,504	∞	12,902	9,194	6,286	4,877

Zahlentafel III. Die Werte der

Linie	$u =$	0	0,277	0,554	0,830	1,107
	v					
0	0	0	0,270	0,505	0,685	0,810
1	0,160	0,172 i	0,278 + 0,150 i	0,515 + 0,121 i	0,694 + 0,088 i	0,816 + 0,058 i
2	0,319	0,331 i	0,274 + 0,305 i	0,545 + 0,267 i	0,721 + 0,173 i	0,839 + 0,113 i
3	0,479	0,519 i	0,334 + 0,474 i	0,599 + 0,367 i	0.770 + 0,252 i	0,875 + 0,163 i
4	0,639	0,74 i	0.398 + 0,661 i	0,680 + 0,493 i	0,845 + 0,325 i	0,928 + 0.202 i
5	0,799	1,018 i	0,505 + 0,884 i	0,812 + 0,615 i	0,945 + 0,383 i	0,992 + 0,228 i
6	0,959	1,377 i	0,690 + 1,128 i	0,994 + 0,706 i	1,066 + 0,405 i	1,068 + 0,228 i
7	1,119	1,985 i	1,03 + 1,456 i	1,259 + 0,771 i	1.210 + 0,396 i	1,141 + 0,212 i
8	1,278	3,12 i	1,694 + 1.746 i	1,582 + 0,709 i	1,358 + 0,324 i	1.21 + 0,163 i
9	1,438	6,3989 i	2,898 + 1,564 i	1,895 + 0,443 i	1,457 + 0.182 i	1,249 + 0,088 i
10	1,598	∞	3,82	2,05	1,512	1,278

Zahlentafel IV. Die Werte der

Linie	$u =$	0	0,160	0,319	0,479	0,639
	v					
0	0	0	0,159	0,314	0,460	0,594
1	0,277	0,28 i	0,16 + 0,28 i	0,33 + 0,27 i	0,48 + 0,25 i	0,62 + 0,22 i
2	0,554	0,59 i	0,19 + 0,58 i	0,37 + 0,55 i	0,54 + 0,51 i	0,69 + 0,46 i
3	0,830	0,94 i	0,22 + 0,92 i	0,44 + 0,88 i	0,64 + 0,82 i	0,82 + 0,73 i
4	1,107	1.38 i	0,29 + 1,36 i	0,56 + 1,29 i	0,81 + 1,18 i	1,03 + 1,05 i
5	1,384	1,97 i	0,39 + 1,93 i	0.76 + 1,81 i	1,08 + 1,64 i	1,35 + 1,43 i
6	1,661	2,80 i	0,58 + 2,72 i	1,09 + 2,52 i	1,52 + 2,21 i	1,84 + 1,86 i
7	1.938	4,13 i	0,96 + 3,96 i	1,78 + 3,51 i	2,35 + 2,93 i	2,69 + 2,34 i
8	2,214	6.55 i	1.94 + 6,04 i	3,20 + 4,85 i	3,74 + 3,60 i	3,85 + 2,58 i
9	2,491	13,72 i	6,12 + 10,23 i	7,11 + 5,81 i	6,36 + 3,30 i	5,52 + 2,02 i
10	2,768	∞	22,916	12,306	8,394	6,498

Bedingung dafür, daß die Abbildungsfunktion J sich in der Form (10) darstellen läßt, besteht nun offenbar darin, daß die beiden auf diese Weise gewonnenen α übereinstimmen. Diese Bedingung läßt sich in der Form

$$\frac{\overline{AF}}{K_1'} = \frac{\overline{DC}}{K_2'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

formulieren, wobei K_1' und K_2' die Lösungen der Gleichung (13) sind.

Als wichtigen Spezialfall, in dem J die Form (10) hat, wollen wir den Fall erwähnen, daß $\overline{AB} = \overline{CB}$, $\overline{AF} = \overline{CD}$ und $\overline{ED} = \overline{EF}$ ist.

Ist das Periodenverhältnis $\frac{K_1}{K_1'}$ und $\frac{K_2}{K_2'}$ der beiden Integrale aus (13) bekannt, so lassen sich die beiden Moduln k_1 und k_2 bestimmen und aus (11) die gesuchten Verzweigungspunkte λ und $\varkappa$ des Integrals J.

Funktion $w = snam\ (z, 20^0)$; **wobei** $z = u + v\,i$.

0,810	0,972	1,134	1,296	1,458	1,620
0,718	0,818	0,891	0,954	0,988	1
0,738 + 0,1715 i	0,845 + 0,140 i	0,921 + 0,1066 i	0,980 + 0,071 i	1,015 + 0,0316 i	1,028
0,812 + 0,344 i	0,92 + 0,286 i	1,005 + 0,212 i	1,065 + 0,145 i	1,100 + 0,073 i	1,111
0,931 + 0,545 i	1,051 + 0,440 i	1,138 + 0,330 i	1,200 + 0,221 i	1,230 + 0,110 i	1,250
1,122 + 0,737 i	1,250 + 0,591 i	1,332 + 0,441 i	1,410 + 0,291 i	1,440 + 0,147 i	1,456
1,40 + 0,986 i	1,538 + 0,781 i	1,616 + 0,569 i	1,657 + 0,367 i	1,698 + 0,183 i	1,70
1,790 + 1,20 i	1,891 + 0,914 i	1,950 + 0,66 i	1,988 + 0,422 i	2,003 + 0,207 i	2,008
2,340 + 1,357 i	2,377 + 0,99 i	2,365 + 0,691 i	2,350 + 0,43 i	2,333 + 0,208 i	2,33
3,080 + 1,306 i	2,940 + 0,896 i	2,830 + 0,605 i	2,736 + 0,366 i	2,679 + 0,175 i	2,630
3,752 + 0,866 i	3,380 + 0,561 i	3,146 + 0,366 i	2,965 + 0,216 i	2,875 + 0,103 i	2,845
4,073	3,576	3,283	3,065	2,958	2,924

Funktion $w = s\,n\,a\,m\ (z, 75^0)$; **wobei** $z = u + v\,i$.

1,384	1,661	1,938	2,214	2,491	2,768
0,891	0,942	0,971	0,989	0,997	1
0,897 + 0,036 i	0,945 + 0,022 i	0,974 + 0,013 i	0,990 + 0,007 i	0,998 + 0,003 i	1,0008
0,912 + 0,071 i	0,955 + 0,043 i	0,980 + 0,025 i	0,994 + 0,013 i	1,001 + 0,005 i	1,003
0,936 + 0,099 i	0,970 + 0,059 i	0,990 + 0,034 i	1,000 + 0,019 i	1,006 + 0,008 i	1,007
0,969 + 0,122 i	0,991 + 0,071 i	1,002 + 0,040 i	1,008 + 0,022 i	1,011 + 0,009 i	1,012
1,009 + 0,133 i	1,015 + 0,077 i	1,016 + 0,043 i	1,017 + 0,023 i	1,017 + 0,010 i	1,017
1,056 + 0,129 i	1,040 + 0,076 i	1,032 + 0,041 i	1,027 + 0,022 i	1,028 + 0,009 i	1,023
1,092 + 0,116 i	1,068 + 0,065 i	1,046 + 0,036 i	1,035 + 0,019 i	1,029 + 0,008 i	1,028
1,125 + 0,087 i	1,079 + 0,048 i	1,050 + 0,026 i	1,036 + 0,014 i	1,034 + 0,006 i	1,032
1,143 + 0,046 i	1,085 + 0,025 i	1,053 + 0,014 i	1,046 + 0,007 i	1,037 + 0,003 i	1,034
1,161	1,099	1,065	1,047	1,038	1,035

Funktion $w = s\,n\,a\,m\ (z, 15^0)$; **wobei** $z = u + v\,i$.

0,799	0,959	1,119	1,278	1,438	1,598
0,713	0,814	0,894	0,952	0,988	1
0,74 + 0,19 i	0,84 + 0,16 i	0,93 + 0,12 i	0,99 + 0,08 i	1,02 + 0,04 i	1,04
0,84 + 0,40 i	0,94 + 0,32 i	1,03 + 0,25 i	1,09 + 0,17 i	1,13 + 0,09 i	1,15
0,98 + 0,63 i	1,11 + 0,51 i	1,21 + 0,39 i	1,28 + 0,26 i	1,32 + 0,13 i	1,33
1,21 + 0,89 i	1,36 + 0,71 i	1,47 + 0,56 i	1,55 + 0,37 i	1,59 + 0,18 i	1,61
1,56 + 1,20 i	1,72 + 0,94 i	1,83 + 0,71 i	1,91 + 0,47 i	1,95 + 0,23 i	1,97
2,07 + 1,50 i	2,23 + 1,13 i	2,33 + 0,82 i	2,39 + 0,52 i	2,40 + 0,22 i	2,41
2.87 + 1,80 i	2,95 + 1,32 i	2,98 + 0,94 i	2,99 + 1,60 i	2,99 + 0,29 i	2,90
3,78 + 1,83 i	3,68 + 1,26 i	3,54 + 0,86 i	3,44 + 0,54 i	3,38 + 0,26 i	3,36
4,89 + 1,27 i	4,34 + 9,82 i	4,09 + 0,51 i	3,88 + 0,32 i	3,77 + 0,14 i	3,72
5,420	4,746	4,320	4,055	3,909	3,8626

Um die Berechnung von k_1 und $\varkappa_2$ zu vereinfachen, wurde vorher $\frac{K_1}{K_1'}$ als Funktion von φ_1, wobei $\sin \varphi_1 = k_1$ gesetzt wurde, berechnet.

3. Ein numerisches Beispiel. Wir wollen an Hand eines Beispiels die aus den Betrachtungen des § 2 sich ergebende Methode der konformen Abbildung von R auf G erläutern.

Es kommen dabei eigentlich zwei verschiedene Fragen in Betracht:

1. festzustellen, daß die Abbildungsfunktion sich in der Form (10) darstellen läßt, und die Konstanten λ und $\varkappa$ zu berechnen;

2. nachdem dies geschehen, ist zu zeigen, wie man praktisch bequem die im Laufe der Rechnung vorkommenden elliptischen Integrale auswerten kann.

Es sei der Bereich G mit den Seiten $CB = AB = 4{,}36$, $CD = AF = 3{,}196$, $DE = EF = 1{,}16$ vorgelegt. Man sieht von vornherein, daß die Abbildungsfunktion J

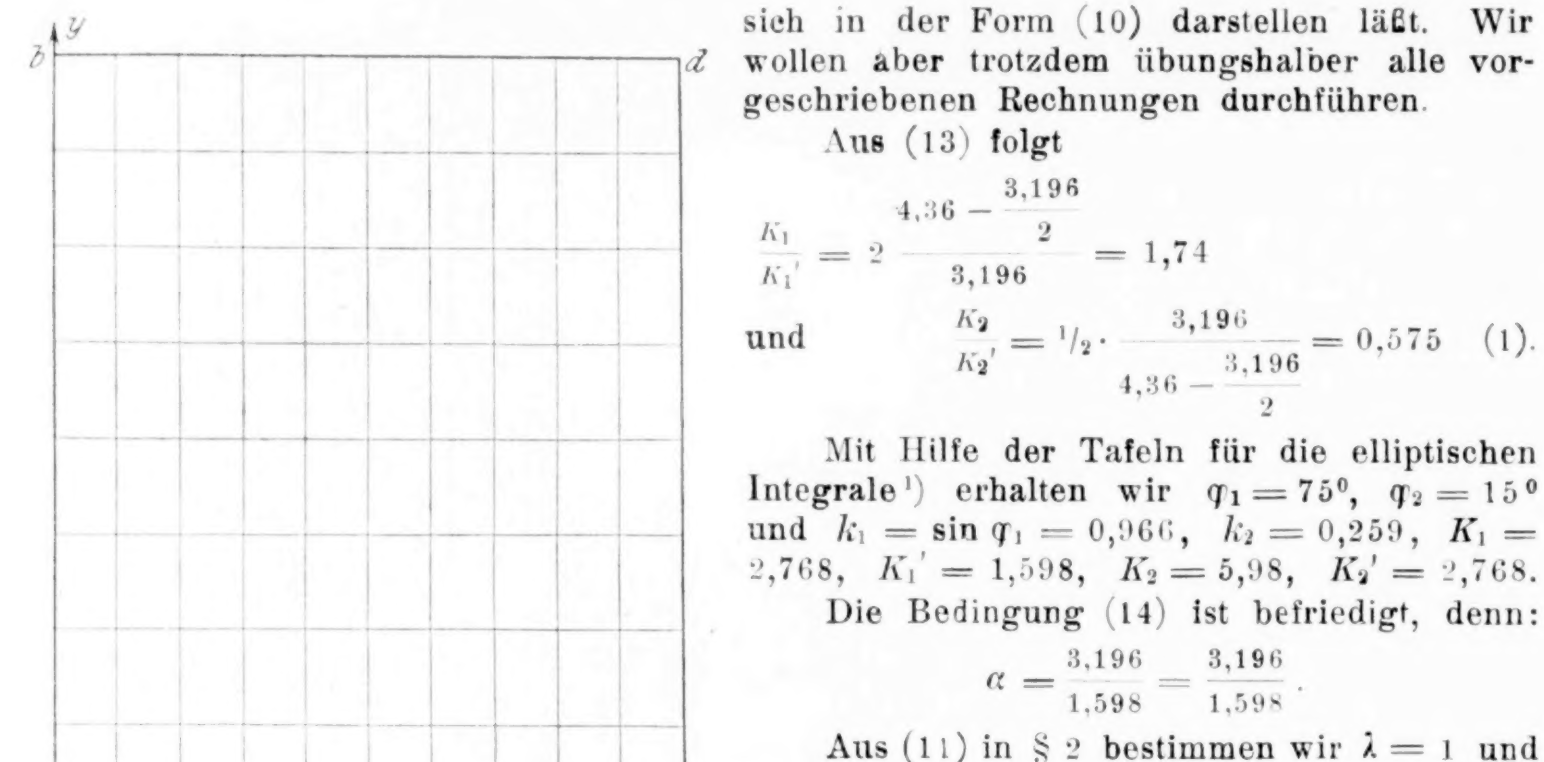


Abb. 6.

sich in der Form (10) darstellen läßt. Wir wollen aber trotzdem übungshalber alle vorgeschriebenen Rechnungen durchführen.

Aus (13) folgt

$$\frac{K_1}{K_1'} = 2\,\frac{4{,}36 - \frac{3{,}196}{2}}{3{,}196} = 1{,}74$$

und
$$\frac{K_2}{K_2'} = {}^1/_2 \cdot \frac{3{,}196}{4{,}36 - \frac{3{,}196}{2}} = 0{,}575 \quad (1).$$

Mit Hilfe der Tafeln für die elliptischen Integrale[1]) erhalten wir $\varphi_1 = 75^0$, $\varphi_2 = 15^0$ und $k_1 = \sin \varphi_1 = 0{,}966$, $k_2 = 0{,}259$, $K_1 = 2{,}768$, $K_1' = 1{,}598$, $K_2 = 5{,}98$, $K_2' = 2{,}768$.

Die Bedingung (14) ist befriedigt, denn:

$$\alpha = \frac{3{,}196}{1{,}598} = \frac{3{,}196}{1{,}598}.$$

Aus (11) in § 2 bestimmen wir $\lambda = 1$ und $\varkappa = 2{,}92$.

Wir können jetzt das Seitenverhältnis $\frac{fa}{ac}$ von R bestimmen. R muß so beschaffen sein, daß bei der Abbildung auf H die Punkte a, b, c, d in die Punkte $-2{,}92$; -1;

[1]) z. B. Jahnke und Emde. Funktionentafeln. Leipzig und Berlin 1909. S. 46 ff.

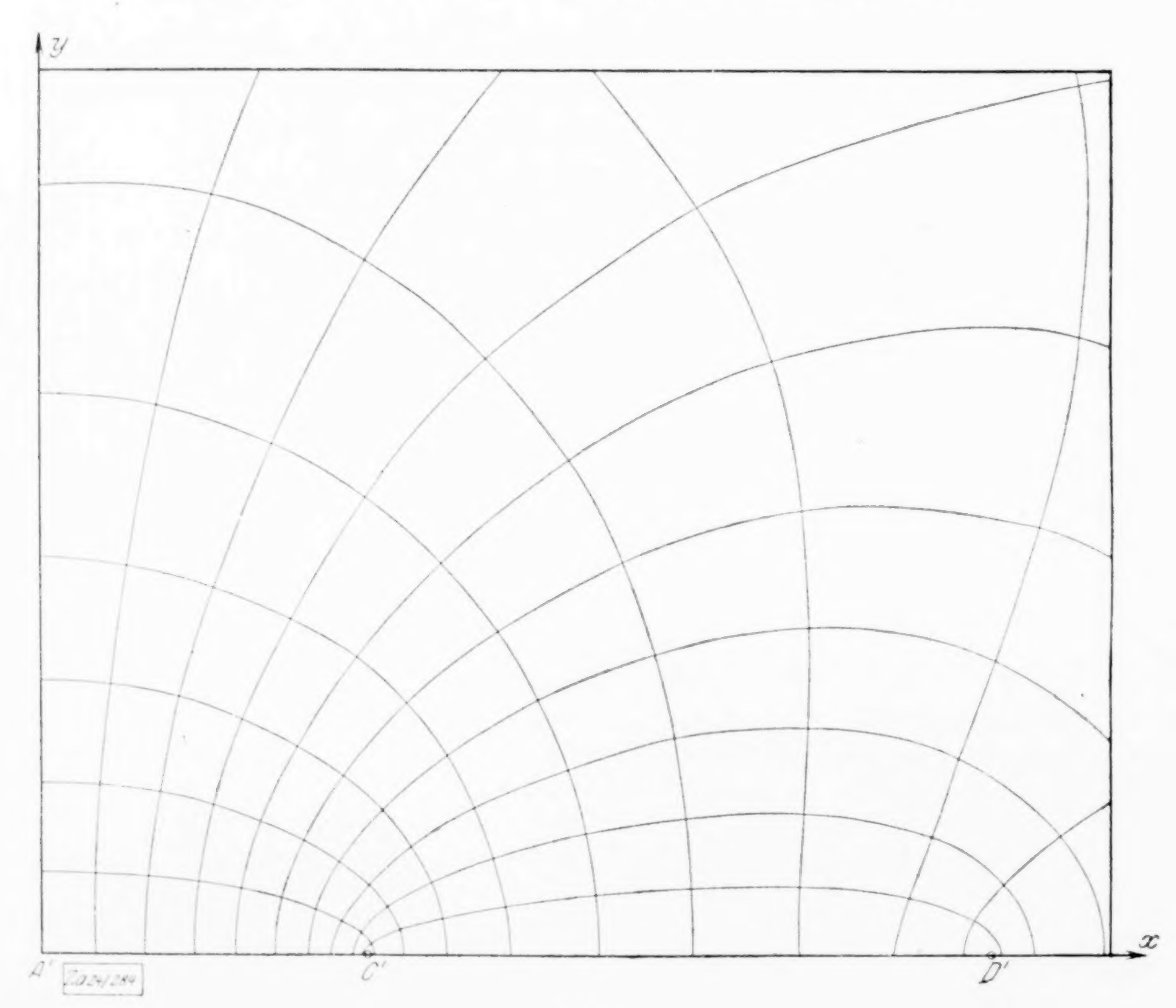


Abb. 7.

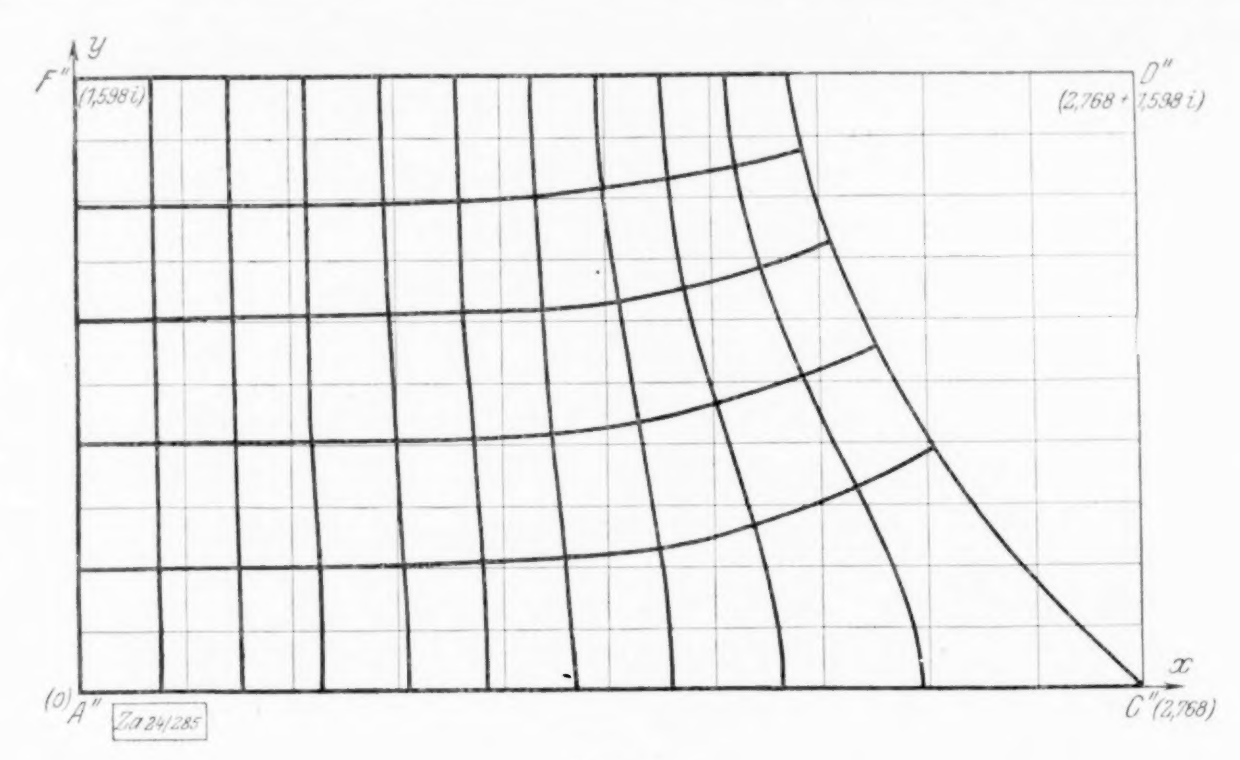


Abb. 8.

1, 2,92 übergehen. Letztere Punkte sind die Verzweigungspunkte des Integrals $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{\varkappa^2}z^2\right)}}$, das H auf R abbildet, $\left(\frac{1}{\varkappa} = \sin 20^0\right)$; die Seiten des Rechteckes R sind $\overline{ac} = 1{,}62$, $\overline{af} = 2{,}5046$. R wird durch $snam\,(z, 20^0)$ auf H abgebildet.

Damit haben wir beide Funktionen

$$f_1(z) = snam\,(z, 20^0) \text{ und } f_2 = \left[\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-0{,}966^2 z^2)}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-0{,}259^2 t^2)}}\right]$$

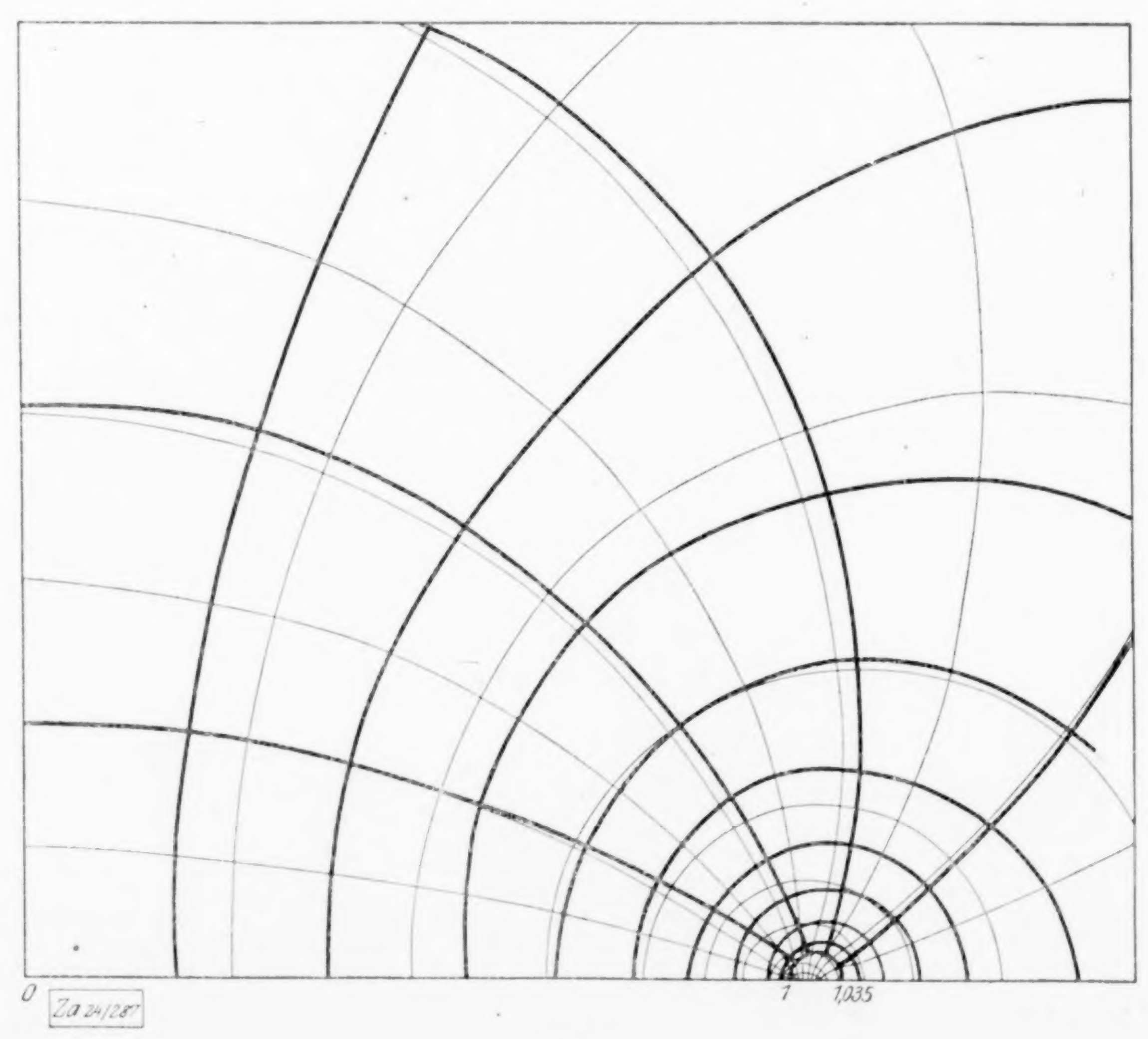


Abb. 9.

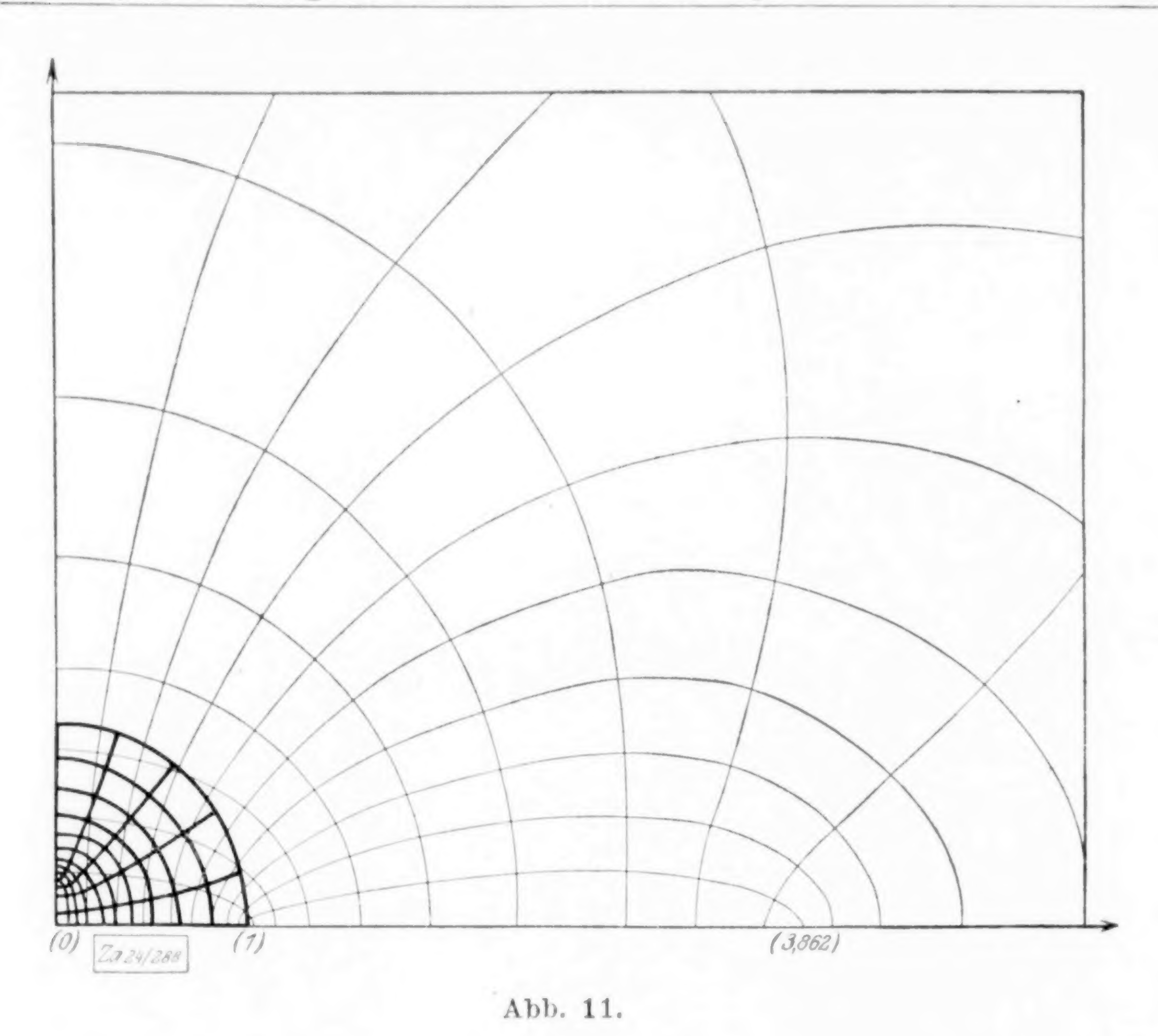


Abb. 11.

gewonnen und gehen dazu über, zu zeigen, wie man *snam* und die elliptische Integrale praktisch bequem auswerten kann.

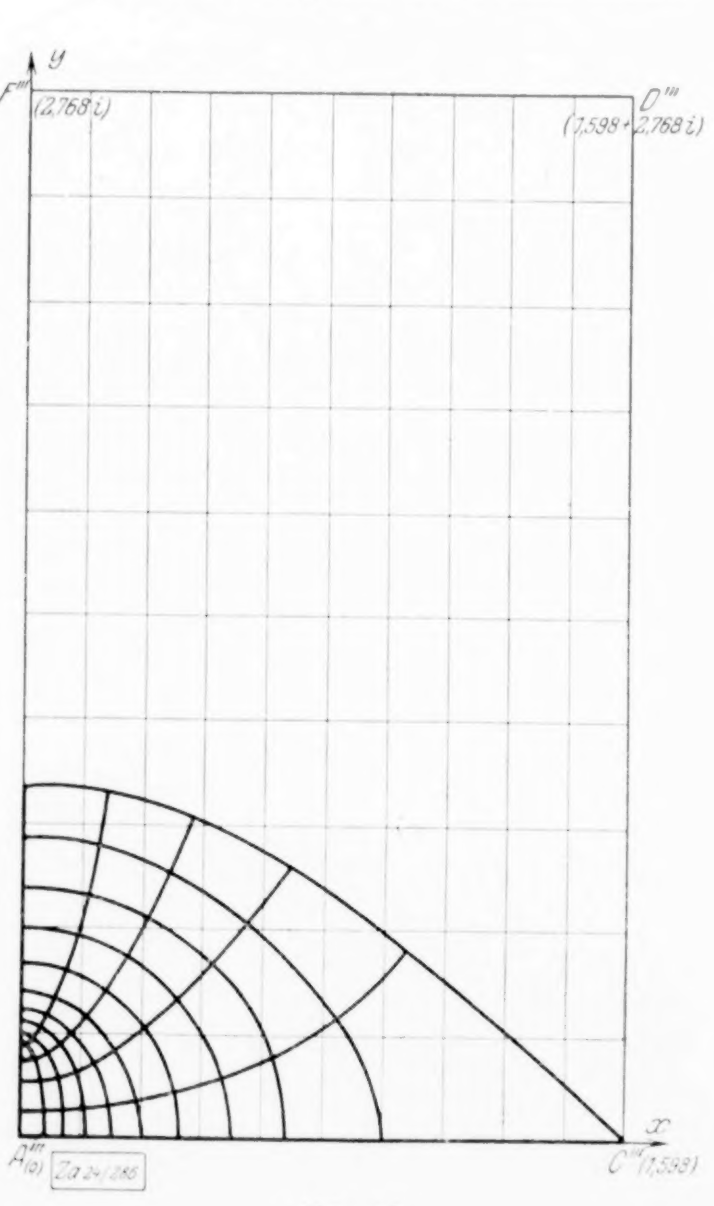


Abb. 10.

Es gibt bekanntlich Tafeln für *snam* für reelle Argumente. Die Funktionswerte für komplexe Argumente kann man mit Hilfe des Additionstheorems aus den Werten für reelle Argumente leicht ausrechnen. Bekanntlich ist

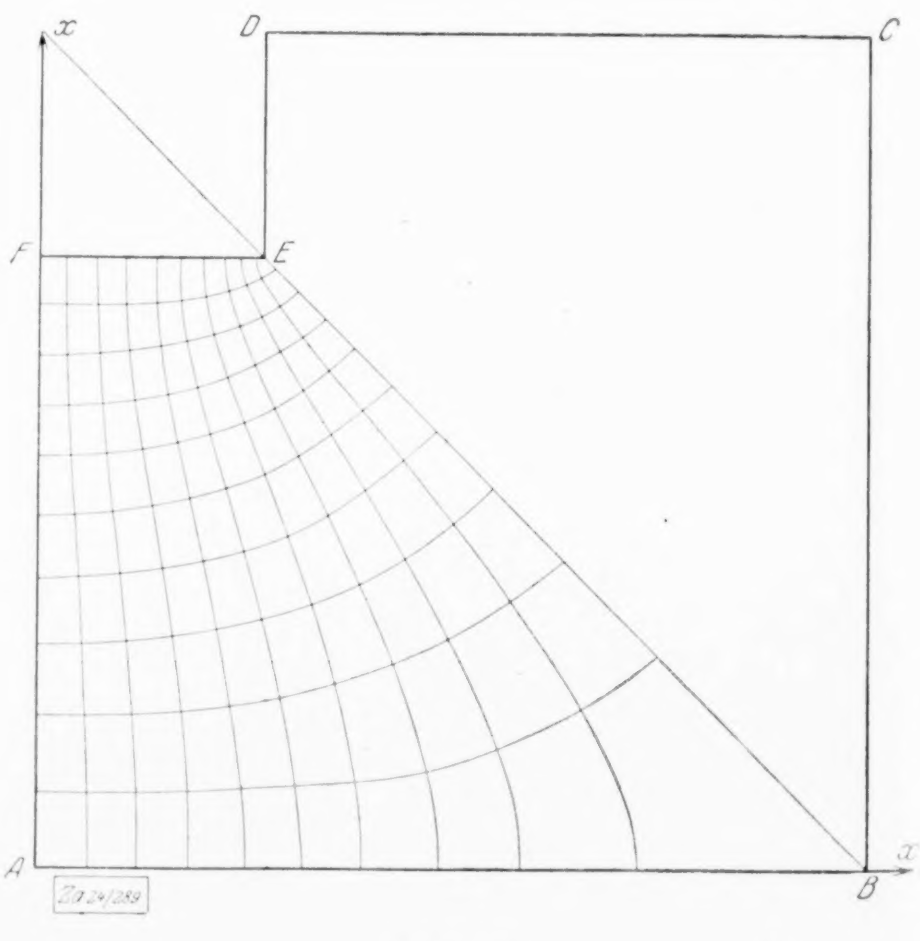


Abb. 12.

$$snam(u+vi, x) = \frac{snam(u,x)\,\Delta(v,x_1) + i\,cnam(u,x)\,\Delta(ux)\,snam(v,x_1)\,cnam(v,x_1)}{1 - snam^2(v,x_1)\,\Delta^2(u,x)},$$

wobei $cnam = \sqrt{1 - snam^2}$; $\Delta = \sqrt{1 - x^2\,snam^2}$; x der Modul, $x_1 = \sqrt{1 - x^2}$ der komplementäre Modul ist.

Das Rechteck R (Abb. 6) werde durch ein rechteckiges Gitter in 100 Teile geteilt. Die eine der das Gitter erzeugenden Scharen sind die Niveaulinien der Funktion $x =$ konst., die wir auf G übertragen wollen, die andere Schar die orthogonalen Trajektorien dazu. Die den Gitterpunkten von R entsprechenden Punkte haben wir nach $f_1(z)$ berechnet und in der Zahlentafel II zusammengestellt.

In Abb. 7 haben wir in der z Ebene die Punkte markiert und durch Kurven verbunden. Das auf diese Weise erhaltene Netz ist die konforme Abbildung des Rechteckgitters in R.

Schließlich ist noch das erhaltene Netz auf G zu übertragen. Die Werte von z und t können wir rechnerisch oder graphisch mit Hilfe der Substitutionen (9) ermitteln.

Schwieriger ist die Bestimmung der Werte der beiden in (10) vorkommenden elliptischen Integrale. Das geschah hier durch graphische Interpolation auf folgendem Wege: Die zu dem elliptischen Integral inverse Funktion ist *snam*. Diese bildet ein bestimmtes Rechteck R_1 auf die obere Halbebene ab. Wir legen, wie früher, ein genügend dichtes Rechtecksgitter in R_1 und bilden es mit *snam* auf die obere Halbebene ab.

Nun markieren wir in der oberen Halbebene die obere Grenze des Integrals und mit Hilfe unseres Netzes übertragen wir es zurück auf R_1. Der erhaltene Wert gibt uns den Wert des Integrals.

In der Zahlentafel III haben wir die Werte für *snam* $(z, 75^0)$ zusammengestellt und mit Hilfe dieser Zahlentafel die Abb. 9 konstruiert. In Abb. 9 haben wir die Punkte z markiert und durch Kurven (stärker ausgezogen) verbunden. Dieselben wurden auf das Rechteck, Abb. 8, übertragen. Genau dasselbe geschah für das zweite Integral mittels Zahlentafel IV, Abb. 10 und Abb. 11.

Addieren wir die in den Abb. 8 und 10 erhaltenen entsprechenden Werte, markieren die Summenwerte in der ω-Ebene und verbinden sie durch entsprechende Kurven, so gelangen wir zur Abb. 12. Dies sind die gesuchten Kraftlinien und ihre orthogonalen Trajektorien, die Linien konstanten magnetischen Potentials (konstanten magnetischen Widerstandes). 246

Zweibein und Kreisel.

Von **EMIL WAELSCH** in Brünn.

Die Trägheit eines Kreisels kann, in gegenüber Drehstreckungen invarianter Weise, bestimmt werden durch ein Zweibein[1]), das ist das Gebilde, welches aus zwei gleichlangen von einen Punkt ausgehenden Vektoren besteht, und durch einen Skalar. Durch dieses Zweibein und diesen Skalar können dann die Größen des Problems und seine Differentialgleichungen in invarianter Weise dargestellt werden.

Es wird im Folgenden die »Basis« des Zweibeins behandelt, welche die ganzen und rationalen Komitanten (Invarianten und Kovarianten) desselben enthält, durch die sich alle anderen ganz und rational ausdrücken.

In den Fällen des schweren symmetrischen und des kräftefreien Kreisels ergeben sich die zugehörigen elliptischen Differentialgleichungen aus einem gemeinsamen Gesichtspunkt: der Auflösung der »Schiefe«, indem das Quadrat einer schiefen Komitante (d. h. einer solchen, die bei Aenderung der Richtung sämtlicher Vektoren ihr Vorzeichen ändert) durch gerade Komitanten ausgedrückt wird.

Zum Schlusse werden auch die Fälle von Staude und Heß in Betracht gezogen, wobei sich neue Beziehungen der auftretenden vektorischen Größen ergeben.

---

[1]) Siehe meine Arbeiten in Comptes rendus u. Wien. Monatshefte für Math u. Phys. 1906 sowie bez. der in folg. verwendeteten »Vielbeinrechnung«: »Polynomialvektoranalyse und Kugelfunktionen«, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923, die in folg. unter »P« zitiert wird, u. vergl. auch meine voraufgehenden Arbeiten über »Binäranalyse«. Bez. der »Sphäronome«, d. s in x, y, z ganze rationale und homogene Kugelfunktionen s. P., Comptes rendus 1907 u. Wien. Monatshefte 1909.

1. Die Grundlagen mit Hilfe von Trägheitszweibein und Trägheitsskalar.

1. Ein Zweibein $\mathfrak{Z}$, dessen Teilvektoren von dem Anfangspunkt O ausgehen, hat 5 Konstante. Ist $\mathfrak{r}^2$ das »spezielle« Zweibein, welches den Vektor $\mathfrak{r}$ der momentanen Rotation zweimal enthält, so soll der »Vollbund« $\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}^2$ gebildet werden. Ist dann M ein Skalar und[1]) $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\mathfrak{r}$ der Vollbund des Vektors $\mathfrak{r}$ mit sich selbst (der gleich ist dem doppelten skalaren Produkt $\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$), so hat die Summe $\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}^2 + M\mathfrak{r}_\mathfrak{r}$ sechs Konstante und ist quadratisch in $\mathfrak{r}$. Daher kann für die kinetische Energie T des Kreisels gesetzt werden[2]):

$$4\,T = \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}^2 + M\mathfrak{r}_\mathfrak{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die Trägheit des Kreisels kann demnach als bestimmt angesehen werden durch das »Trägheitszweibein« $\mathfrak{Z}$ und den »Trägheitsskalar« M.

Für den Impulsvektor $\mathfrak{y}$ gilt bekanntlich, daß sein skalares Produkt mit der Rotation $\mathfrak{r}$ gleich $2\,T$ ist; daher ist: $4\,T = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{y} = \mathfrak{r}_\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_\mathfrak{r}$.

Nun ist nach (1): $4\,T = (\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{r} + M\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} = [P(5)] = (\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r} + M\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{r}$ daher ergibt sich für den Impulsvektor $\mathfrak{y}$:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r} + M\mathfrak{r} = \mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + M\mathfrak{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

2. Es werde das Trägheitszweibein $\mathfrak{Z}$ in seine beiden gleich langen Teilvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, welche »Trägheitsvektoren« des Kreisels genannt werden sollen, zerlegt, so daß: $\mathfrak{Z} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ ist, und es werde gesetzt:

$$1/2\,\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = 1/2\,\mathfrak{q}_\mathfrak{q} = |\mathfrak{p}|^2 = |\mathfrak{q}|^2 = P, \qquad 1/2\,\mathfrak{p}_\mathfrak{q} = P\cos[\measuredangle(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = \varphi] = Q \quad . \quad (3).$$

$$A = M + 1/3\,Q + P, \qquad B = M - 2/3\,Q, \qquad C = M + 1/3\,Q - P \quad . \; . \quad (4).$$

Für den Impulsvektor $\mathfrak{y}$ bzw. die kinetische Energie T gilt dann nach (1), (2) die Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y} &= \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{r} + M\mathfrak{r} = [P.(14)] = 1/2\,\mathfrak{p}_\mathfrak{r}\,\mathfrak{q} + 1/2\,\mathfrak{q}_\mathfrak{r}\,\mathfrak{p} + B\,\mathfrak{r} \\ 4\,T &= \mathfrak{y}\cdot\mathfrak{r} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{r}^2 + M\mathfrak{r}_\mathfrak{r} = \mathfrak{p}_\mathfrak{r}\,\mathfrak{q}_\mathfrak{r} + B\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5).$$

Hiernach entsprechen den Trägheitsvektoren $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ die folgenden Vektoren als $\mathfrak{y}$:

$$P\,\mathfrak{q} + (Q + B)\,\mathfrak{p}, \qquad P\,\mathfrak{p} + (Q + B)\,\mathfrak{q} \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

daher den paarweise aufeinander senkrechten Vektoren $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ (die auf den Winkelhalbierenden der $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bzw. auf deren Lot durch O liegen) die Vektoren: $A(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})$, $B\,\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}$, $C(\mathfrak{p} - \mathfrak{q})$, so daß $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ auf den Hauptträgheitsaxen liegen, und A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente sind. Aus (4) folgt, daß $3\,M = A + B + C$, weshalb der Trägheitsskalar M die Bedeutung des Mittels der drei Hauptträgheitsmomente hat. Auch folgt, daß:

$$2\,P = A - C, \quad 2\,Q = A + C - 2\,B, \quad Q/P = \cos\varphi = (A + C - 2\,B)/(A - C) \quad (7).$$

Es ist nach (4): $A - B, B - C = P \pm Q = (3) = P(1 \pm \cos\varphi) \geq 0$, demnach: $A \geq B \geq C$.

Verschwindet das Zweibein $\mathfrak{Z}$, also auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so wird P und Q gleich 0 und daher nach (4): $A = B = C = M$; der Kreisel wird demnach zum Kugelkreisel. Das Zweibein $\mathfrak{Z}$ gibt daher die Abweichung des Kreisels vom Kugelkreisel.

Die Normalkomponente von $\mathfrak{y}$ bez. $\mathfrak{r}$ ist, wenn $\mathfrak{r}_1$ der Einheitsvektor mit der Richtung von $\mathfrak{r}$ ist: $\mathfrak{r}_1\,\mathrm{i}\,\mathfrak{y}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}_1 = (2) = \mathfrak{r}_1\,\mathrm{i}\,\mathfrak{Z}_\mathfrak{r}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}_1$, also dieselbe wie die von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{r}$; sie hängt daher nur von dem Trägheitszweibein $\mathfrak{Z}$ ab.

3. Das Trägheitsmoment M für die Rotation $\mathfrak{r}$ ist nach (1):

$$\mathrm{M} = 2\,T/\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 4\,T/\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} = \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}^2/\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} + M \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

$$\mathrm{M} = {}^{3)} = 1/2\,\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}_1{}^2 + M = (5) = 1/2\,\mathfrak{p}_{\mathfrak{r}1}\,\mathfrak{q}_{\mathfrak{r}1} + B = 2\,\mathfrak{p}.\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{q}.\mathfrak{r}_1 + B \quad . \; . \; . \quad (9).$$

Hieraus folgt zunächst, daß, wenn $\mathfrak{r}$ senkrecht ist zu $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$, $\mathrm{M} = B$ wird. Die Trägheitsvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ stehen daher senkrecht auf den Ebenen, welche die Achsen gleichen Trägheitsmomentes B enthalten, d. s. die Kreisschnittebenen des Trägheitsellipsoids.

---

[1]) Der Kürze wegen soll der Vollbund des Vielbeins $\mathfrak{v}$ bez. $\mathfrak{w}$ oder der Vollbund schlechtweg mit $\mathfrak{v}_\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_\mathfrak{v}$ bezeichnet werden, z. B. der Vollbund $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ zweier Vektoren mit: $\mathfrak{a}_\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$, wie schon in P. Art. 7. Es soll ferner $\underset{0}{\mathfrak{a}^{(\alpha)}}$ das Sphäronom mit dem αbein $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ bedeuten; z. B. $\mathfrak{Z}_0$ das Sphäronom zweiter Ordnung $\mathfrak{Z}.\mathfrak{r}^2$ mit dem Zweibein $\mathfrak{Z}$.

[2]) Hiernach ist die kinetische Energie nach Sphäronomen entwickelt, da $\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{Z}_0$ das Sphäronom 2. Ordnung ist. Der Faktor 4 wird aus Zweckmäßigkeitsgründen eingeführt.

[3]) Entwicklung des Trägheitsmoments nach Flächensphäronomen (Kugelflächenfunktionen).

Ferner folgt aus (9), daß $2\,\mathfrak{p}.\mathfrak{r}_1\;\mathfrak{q}.\mathfrak{r}_1$ die Abweichung des Trägheitsmoments M für die Achse $\mathfrak{r}$ von B ist, d. i. das doppelte Produkt der Projektionen der Trägheitsvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ auf die Achse[1]).

4. Ist beim allgemeinen Kreisel $\mathfrak{v}$ der aufwärts, $\mathfrak{e}$ der gegen den Schwerpunkt des Kreisels gerichtete Einheitsvektor, ferner S das Produkt aus Gewicht des Kreisels und Abstand des Schwerpunktes von O, $\mathfrak{n}$ der Vektor der äußeren Kräfte, so lautet die Eulersche Gleichung bzw. die kinematische Gleichung der Bewegung des Kreisels:

$$\mathfrak{y}^{\bullet} = \mathfrak{y}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r} + [\mathfrak{n} = S\,\mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{e}], \qquad \mathfrak{v}^{\bullet} = \mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r} \quad \ldots\ldots \quad (10), (11).$$

Der Vollbund von (10) mit $\mathfrak{v}$ gibt:

$$\mathfrak{y}^{\bullet}{}_{\mathfrak{v}} + [\mathfrak{r}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{y} = (11) =]\,\dot{\mathfrak{v}}\cdot\mathfrak{y} = (\mathfrak{y}_{\mathfrak{v}})^{\bullet} = 0, \quad \text{woraus:}$$

$$\mathfrak{y}_{\mathfrak{v}} = \text{konst.} = 2\,n, \qquad (\quad \text{der Flächen}) \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Aus (1) ergibt sich:

$$2\,T^{\bullet} = \mathfrak{Z}^{\bullet}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}^{\bullet}) + M\,\mathfrak{r}^{\bullet}_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{Z}^{\bullet}\dot{\mathfrak{r}}^{\bullet}\mathfrak{r} + M\,\dot{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}} = (\mathfrak{Z}^{\bullet}\mathfrak{r}^{\bullet} + M\,\mathfrak{r}^{\bullet})^{\bullet}\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{r}}$$
$$= (10) = S\,[\mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r} = -\,\mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e} = (11)] = -\,S\,\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{e} = -\,S\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{e}})^{\bullet}.$$

Daher folgt, $\mathfrak{v}_{\mathfrak{e}} = 2\,u$ gesetzt:

$$T + S\,u = h \qquad (\,\text{, der Kinergie}) \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Die Gl. (10) nimmt nach (2) auch die Gestalt an:

$$\mathfrak{Z}^{\bullet}_{\mathfrak{r}} + M\,\mathfrak{r}^{\bullet} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{n} \quad \ldots\ldots \quad (14)^{2})$$

und lautet ausgedrückt durch die Trägheitsvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nach (5):

$$\mathfrak{p}^{\bullet}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^{\bullet}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{p} + 2\,B\,\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{q}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r} + 2\,\mathfrak{n} \quad \ldots\ldots \quad (15).$$

2. Symmetrischer Kreisel (Fall von Lagrange). 5. Ist das Zweibein $\mathfrak{Z}$ »speziell« $= \pm\,\mathfrak{p}^2$, also $\mathfrak{q} = \pm\,\mathfrak{p}$, so ist $\varphi = 0$ bzw. $= 180^0$, daher nach (3): $Q = \pm\,P$ und nach (4): $A > B = C$ bzw. $A = B > C$; der Kreisel wird »symmetrisch«, wenn noch der Schwerpunkt auf der Kreiselachse $\mathfrak{p}$ liegt, u. z. abgeplattet bzw. verlängert. Es ist dementsprechend nach (4): $2\,Q + B = 2\,P + B = A$ bzw. $2\,Q + B = -\,2\,P + B = C$ oder beidemal $= C$, wenn das Trägheitsmoment bez. der Kreiselachse mit C bezeichnet wird.

Zwischen den nicht von der Trägheit abhängigen Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{e}$ besteht nach P. (13) die Relation

$$2\,(\mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e})^2 = |\mathfrak{v}_{\mathfrak{v}},\, \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}},\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{e}}| \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Diese gibt links $8\,\dot{u}^2$, da nach (11): $\mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e} = \dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{e}} = (\mathfrak{v}_{\mathfrak{e}})^{\bullet} = 2\,\dot{u}$ und rechts eine Determinante, deren Elemente $\mathfrak{v}_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{e}_{\mathfrak{e}} = 2$, $\mathfrak{v}_{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}_{\mathfrak{v}} = 2\,u$ sind. Da nun ihre weiteren Elemente $\mathfrak{r}_{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}_{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ durch u und die Konstanten des Problems ausgedrückt werden können, ergibt (16) die elliptische Differentialgleichung für u.

In der Tat ist, da $\mathfrak{p} = \sqrt{P}\,\mathfrak{e}$, nach (15), da $\mathfrak{q} = \pm\,\mathfrak{p}$, $\pm\,P = Q$ und hier $B = A$: $Q\,\mathfrak{e}^{\bullet}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{e} + A\,\dot{\mathfrak{r}} = Q\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{e}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r} + S\,\mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{e}$, woraus durch Vollbund mit $\mathfrak{e}$ folgt: $[2\,Q + A = C]\,\mathfrak{e}^{\bullet}_{\mathfrak{r}} = 0$ oder: $\mathfrak{e}^{\bullet}_{\mathfrak{r}} = (\mathfrak{e}_{\mathfrak{r}})^{\bullet} = 0$; daher:

$$\mathfrak{e}_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{e}} = \text{Konst.} = 2\,r_0 \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

---

[1]) Durch Diskussion der Möglichkeiten für das Unendlichwerden des Trägheitsmomentes ergibt sich wie folgt eine Bedeutung des Trägheitszweibeins $\mathfrak{Z}$ (vgl. meine Arbeit Wien. Ber. II, 1904, Art. 15). Nach P. Art. 4 habe $\mathfrak{Z} = \mathfrak{y}\,\mathfrak{q}$ vier Wurzelvektoren mit den Wurzeln a, b, c, d, so daß das Polynom 4. Ordnung von $\mathfrak{Z}$ gleich $k\,a_v\,b_v\,c_v\,d_v$ gesetzt werden kann. Sind x, y die Wurzeln des Rotationsvektors $\mathfrak{r}$, so ist $\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ bis auf einen konstanten Faktor $= x_y{}^2 = (x-y)^2$. Dann ergibt sich für $\mathrm{M} - M$ nach (8) bis auf einen konstanten Faktor $(a_v\,b_v\,c_v\,d_v)^{\bullet}(x_v{}^2\,y_v{}^2)/x_y{}^2$ oder auch $\Sigma\,a_x\,b_x\,c_y\,d_y/(x-y)^2$, wo die a, b, c, d verschieden, und deren Kombinationen zu zweien für a, b zu setzen sind.

Ist nun $x \neq y$, also $\mathfrak{r}.\mathfrak{r} \neq 0$, so ist M endlich. Wenn aber $x = y$, die Rotation demnach um einen Nullvektor erfolgt, so wird der letzte Bruch zwei-, einfach unendlich oder endlich, je nachdem y nicht, einfache oder doppelte Wurzel des Zählers ist, oder auch, wie sich zeigen läßt, des Polynoms von $\mathfrak{Z}$. Daher: nur wenn $\mathfrak{r}$ Nullvektor ist, wird das Trägheitsmoment M im allgemeinen zweifach unendlich; ist aber $\mathfrak{r}$ speziell einer der 4 Wurzelvektoren des Trägheitszweibeins $\mathfrak{Z}$, also einer der Wurzelvektoren der Trägheitsvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, die auf den Minimalgraden der Kreistchnittebenen des Trägheitsellipsoids liegen, so wird M einfach unendlich. Bei einem Kreisel mit einem Trägheitsdrehellipsoid hat $\mathfrak{Z} = \pm\,\mathfrak{p}^2$ zwei Doppelwurzelvektoren auf den Minimalgeraden der Aequatorebene; für diese wird M endlich.

[2]) Statt des Gliedes $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{r}$ kann hier auch nach P. (13) der Dreibund $\mathfrak{Z}\,\dot{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{r}^2$ gesetzt werden, womit jedes Glied in (14) als Bund einer Konstanten mit einer veränderlichen Größe erscheint.

Aus (5) folgt: $\mathfrak{v} = Q\,\mathfrak{c}_\mathfrak{r}\,\mathfrak{c} + A\,\mathfrak{r}$, daher nach (12, 17):

$$\mathfrak{r}_\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_\mathfrak{r} = 2\,(n - 2\,Q\,r_0\,u)\,/A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Endlich ist: $4\,T = (5) = Q\,(\mathfrak{c}_\mathfrak{r})^2 + A\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} = (17) = 4\,Q\,r_0^{\,2} + A\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r}$, daher nach (13):

$$\mathfrak{r}_\mathfrak{r} = 4\,(h - S\,u - Q\,r_0^{\,2})\,/A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Die Relation (16) gibt demnach die fragliche Differentialgleichung in der Form

$$A\,\dot{u}^2 = \begin{vmatrix} A, & n - 2\,Q\,r_0\,u, & u \\ n - 2\,Q\,r_0\,u, & 2\,h - 2\,S u - 2\,Q r_0^{\,2}, & r_0 \\ u, & r_0, & 1/A \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Hieraus folgt, da noch:

$$2\,Q = C - A,\; \mathfrak{v}_\mathfrak{c} = (2\,Q + A)\,\mathfrak{r}_\mathfrak{c} = C\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} = (17) = 2\,r_0\,C = 2\,N,\; r = N/C$$

diese Differentialgleichung in bekannter Gestalt[1]) als:

$$A\,\dot{u}^2 = (u^2 - 1)\,(2\,S\,u + N^2/C - 2\,h) - (N\,u - n)^2/A \quad . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Für den Kugelkreisel ist: $\mathfrak{Z} = \pm\,\mathfrak{p}^2 = 0$, daher in (20): $Q = \pm\,{}^1\!/_2\,\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = 0$ zu setzen.

3. Das Zweibein und sein System. 6. (a) Sind $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ drei paarweise aufeinander senkrechte Einheitsvektoren, so ist[2]): $e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c$ ein Zweibein. Es sei $e_1 +_c = 0$, ferner $e_1 > e_2 > e_3$, und $d_1 = e_2 - e_3,_c$ gesetzt, so daß $d_1 > 0$, $d_3 > 0$.

Dann ist:

$$e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c = e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c - e_2\,[\mathfrak{i}^2 +_c = P.(25) = 0] = d_3\,\mathfrak{i}^2 - d_1\,\mathfrak{k}^2$$
$$= [\mathfrak{p} = \sqrt{d_3}\,\mathfrak{i} + \sqrt{d_1}\,\mathfrak{k}]\,[\mathfrak{q} = \sqrt{d_3}\,\mathfrak{i} - \sqrt{d_1}\,\mathfrak{k}].$$

Das Zweibein zerfällt daher in diese beiden gleich langen Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, die in der $\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}$-Ebene symmetrisch zur $\mathfrak{i}$-Achse liegen. Es kann mit dem obigen Zweibein $\mathfrak{Z}$ identifiziert werden, so daß:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = d_3\,\mathfrak{i}^2 - d_1\,\mathfrak{k}^2 = e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Somit ist:

$$P = |\,\mathfrak{p}\,|^2 = |\,\mathfrak{q}\,|^2 = d_3 + d_1 = -\,d_2 > 0,\; Q = {}^1\!/_2\,\mathfrak{p}_\mathfrak{q} = d_3 - d_1 = -\,3\,e_2 \quad . \quad (23),$$

$$|\,\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\,|^2 = 2\,P + 2\,Q = 4\,d_3,\; |\,\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\,|^2 = 2\,P - 2\,Q = 4\,d_1,\; |\,\mathfrak{p} \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{q}\,|^2 = P^2 - Q^2 = 4\,d_1\,d_3 \quad (24),$$

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = 2\,\sqrt{d_3}\,\mathfrak{i},\; \mathfrak{p} \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{q} = 2\,\sqrt{d_1\,d_3}\,\mathfrak{j},\; \mathfrak{p} - \mathfrak{q} = 2\,\sqrt{d_1}\,\mathfrak{k} \quad . \; . \; . \; . \quad (25).$$

Ferner ist:

$$2\,e_1 = {}^1\!/_3\,Q + P,\; 2\,e_2 = -\,{}^2\!/_3\,Q,\; 2\,e_3 = {}^1\!/_3\,Q - P \quad . \; . \; . \; . \quad (26)^{3)}.$$

(b) Im folgenden werden die Beziehungen aufgestellt zwischen dem Zweibein $\mathfrak{Z}$ und den aus ihm gebildeten Verbänden: dem Zweibein $\mathfrak{H} = {}^1\!/_2\,\mathfrak{Z} \mathbin{\dot{2}} \mathfrak{Z}$, dem Dreibein: $\mathfrak{T} = \mathfrak{H} \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{Z} = {}^1\!/_2\,\mathfrak{Z} \mathbin{\dot{2}} \mathfrak{Z} \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{Z}$, und den Skalaren zweiten und dritten Grades in $\mathfrak{Z}$: $g_2 = {}^1\!/_2\,\mathfrak{Z}.\mathfrak{Z}$, und $g_3 = {}^1\!/_3\,\mathfrak{Z}.\mathfrak{H} = {}^1\!/_6\,\mathfrak{Z} \mathbin{\dot{2}} \mathfrak{Z}.\mathfrak{Z}$[4]). Diese Vielbeine werden ausgedrückt durch die Vektoren $\mathfrak{i},_c$ und die Zahlen $e_1,_c$, ferner durch die Teilvektoren $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{Z}$ und deren Betragsquadrat P und skalares Produkt Q. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= {}^1\!/_2\,\mathfrak{Z}.\mathfrak{Z} = {}^1\!/_2\,(e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c).(e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c) = {}^1\!/_2\,(e_1^{\,2}\,\mathfrak{i}^2.\mathfrak{i}^2 + 2\,e_2\,e_3\,\mathfrak{j}^2.\mathfrak{k}^2) +_c = {}^{5)} \\ &= -\,4\,(e_2\,e_3 +_c) = P^2 + {}^1\!/_3\,Q^2 \end{aligned}\right\} \quad (27),$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= {}^1\!/_2\,\mathfrak{Z} \mathbin{\dot{2}} \mathfrak{Z} = {}^{5)} = {}^1\!/_3\,((e_1^{\,2} + 2\,e_2 e_3)\,\mathfrak{i}^2 +_c) - {}^1\!/_3\,[(e_1 +_c)^2 = 0]\,\mathfrak{i}^2 \\ &= e_1^{\,2}\,\mathfrak{i}^2 +_c = -\,e_3\,d_3\,\mathfrak{i}^2 + e_1\,d_1\,\mathfrak{k}^2 = {}^1\!/_4\,P\,(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) - {}^1\!/_6\,Q\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (28),$$

$$g_3 = {}^1\!/_3\,\mathfrak{Z}.\mathfrak{H} = {}^1\!/_3\,(e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c).(e_1^{\,2}\,\mathfrak{i}^2 +_c) = {}^{5)} = 4\,e_1\,e_2\,e_3 = {}^1\!/_3\,Q\,(P^2 - {}^1\!/_9\,Q^2) \quad (29),$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{H} \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{Z} = (e_1^{\,2}\,\mathfrak{i}^2 +_c) \mathbin{\dot{|}} (e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c) = {}^{5)} = -\,d_1\,d_2\,d_3\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30).$$

---

[1]) Siehe Klein und Sommerfeld, »Kreisel«, II, S. 222.

[2]) Durch das angehängte $_c$ werde die Hinzufügung der zyklischen Vertauschungen des Vorangehenden angedeutet; so steht z. B. $e_1\,\mathfrak{i}^2 +_c$ für $e_1\,\mathfrak{i}^2 + e_2\,\mathfrak{j}^2 + e_3\,\mathfrak{k}^2$ und $d_1 = e_2 - e_3,_c$ für $d_1 = e_2 - e_3$, $d_2 = e_3 - e_1$, $d_3 = e_1 - e_2$.

[3]) Nach Art. 1 multiplizieren sich dann die Vektoren $\mathfrak{r} = \mathfrak{i},_c$ bei Anwendung der Transformation $\mathfrak{v} = \mathfrak{Z}\mathfrak{r}$ (also bei $M = 0$) mit $2\,e_1,_c$, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{i} = 2\,e_1\,\mathfrak{i},_c$.

[4]) Durch diese Vielbeine $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{T}$, g_2, g_3, welche das »System« oder die »Basis« des Zweibeins $\mathfrak{Z}$ bilden, lassen sich (wie aus der Theorie der binären Formen folgt) alle bei Drehstreckungen invarianten, in den Parametern des Zweibeins ganzen und rationalen Vielbeine ganz und rational ausdrücken. Bezüglich der hier in Betracht kommenden Größen der Theorie der binären Formen vgl. hier und im folgenden E. Study, Irrat. covariants of certain binary forms, Am. Journ., t. 17.

[5]) Denn aus den Derivaten von $\mathfrak{i},_c, \mathfrak{i}^2,_c$ folgt: $\mathfrak{i}^2 \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{i} = 0$, $\mathfrak{j}^2 \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{k} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{j}$; $\mathfrak{i}^2 \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{i}^2 = 0$, $\mathfrak{j}^2 \mathbin{\dot{|}} \mathfrak{k}^2 = \mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$; $\mathfrak{i}^2 \mathbin{\dot{2}} \mathfrak{i}^2 = {}^2\!/_3\,\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{j}^2 \mathbin{\dot{2}} \mathfrak{k}^2 = {}^2\!/_3\,\mathfrak{i}^2$; $\mathfrak{i}^2.\mathfrak{i}^2 = {}^8\!/_3$, $\mathfrak{j}^2.\mathfrak{k}^2 = -\,{}^4\!/_3,_c$.

Nach (27, 29) genügen die $e_{1,c}$ der Gleichung

$$4\,e^3 - g_2\,e - g_3 = 0 \quad \ldots \quad (31).$$

Aus (22, 28) folgt

$$-\,d_2\,d_3\,\mathfrak{i}^2 = e_1\,\mathfrak{Z} + \mathfrak{H} \quad \ldots \quad (32).$$

(c) Es ist, $d_1{}^2\,d_2{}^2\,d_3{}^2 = G$ gesetzt, nach (30),

$$\mathfrak{T}^2 = G\,\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j}^2\,\mathfrak{k}^2,\quad G = {}^1/_{16}\,(g_2{}^3 - 27\,g_3{}^2) = {}^{1)} = {}^3/_4\,\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{T} \quad \ldots \quad (33).$$

Der Betrag des Dreibeins $\mathfrak{T}$ ist nach (30), da $d_1\,d_2\,d_3 < 0$ [s. Art. 6 (a)]:

$$|\mathfrak{T}| = -\,d_1\,d_2\,d_3 = \sqrt{G} = (23) = {}^1/_4\,P\,(P^2 - Q^2) = (3) = {}^1/_4\,P^3\sin^2\varphi \quad . \quad (34).$$

Nach (32, 33) ist $\mathfrak{T}^2 = -\,(e_1\,\mathfrak{Z} + \mathfrak{H})_c$, daher ist:

$$4\,\mathfrak{T}^2 = -\,g_3\,\mathfrak{Z}^3 + g_2\,\mathfrak{Z}^2\,\mathfrak{H} - 4\,\mathfrak{H}^3 \quad \ldots \quad (35).$$

(d) Ist das Zweibein $\mathfrak{Z}$ speziell $= \pm\,\mathfrak{p}^2$, also $\mathfrak{q} = \pm\,\mathfrak{p}$, so ist: $\varphi = 0$ bzw. $= 180^0$, also nach (3): $Q = \pm\,P$. Daher ist für das spezielle Zweibein nach (33), da hier nach (24): d_1 oder $d_3 = 0$ ist, $G = 0$, also nach (30): $\mathfrak{T} = 0$.

Ferner ist nach (27, 28, 29):

$$g_2 = {}^4/_3\,P^2,\quad \mathfrak{H} = {}^1/_3\,P\,\mathfrak{p}^2 = {}^1/_3\,Q\,\mathfrak{Z},\quad g_3 = {}^8/_{27}\,Q^3 \quad \ldots \quad (36).$$

(e) Es soll noch wegen späterer Verwendung das Quadrat des Sphäronoms $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}\cdot\mathfrak{r}^3$ nach Potenzen von $\mathfrak{r}_\mathfrak{r}$ entwickelt werden [2]). Hierzu ist $\mathfrak{i}_\mathfrak{r} = 2\,x,_c$, wo x, y, z die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{r}$ bzw. des Koordinatensystems der $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ sind. Dann ist

$$-\,d_2\,d_3\,\mathfrak{i}^2\cdot\mathfrak{r}^2 = -\,d_2\,d_3\,\mathfrak{i}_0^2 = (32) = e_1\,\mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{H}_0,\ \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{r}^2,\ \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{r}^2 \quad . \quad (37),$$

$$\left.\begin{aligned} 4\,x^2 &= (\mathfrak{i}_\mathfrak{r})^2 = \mathfrak{i}_0^2 + {}^2/_3\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} = (37) = ({}^2/_3\,d_2\,d_3\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} - e_1\,\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{H}_0)/d_2\,d_3,\,_c,\\ 64\,x^2\,y^2\,z^2 &= ({}^2/_3\,d_2\,d_3\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} - e_1\,\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{H}_0)_c/G \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (38).$$

Nach P. Art. 8 (b) ist aber

$$\left.\begin{aligned} 8\,x\,y\,z &= (\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k})\cdot\mathfrak{r}^3 = -\,[\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{r}^3 = \mathfrak{T}_0]/\sqrt{G}\\ 64\,G\,x^2\,y^2\,z^2 &= (\mathfrak{T}_0)^2 = ({}^2/_3\,d_2\,d_3\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r} - e_1\,\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{H}_0)_c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (39).$$

Hieraus folgt, da wegen $e_1 + _c = 0$ vermöge (27, 29):

$e_1{}^2 + _c = {}^1/_2\,g_2$, $e_1{}^3 + _c = {}^3/_4\,g_3$, $d_2\,d_3 + _c = -\,{}^3/_4\,g_2$, $e_1\,d_2\,d_3 + _c = -\,{}^9/_4\,g_3$, $e_2\,e_3\,d_2\,d_3 + _c = {}^1/_{16}\,g_2{}^2$, die schließliche Gleichung

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{T}_0)^2 = 64\,G\,x^2y^2z^2 &= {}^8/_{27}\,G\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r}{}^3 - {}^1/_3\,({}^1/_8\,g_2{}^2\,\mathfrak{Z}_0{}^2 - {}^9/_2\,g_3\,\mathfrak{Z}_0\,\mathfrak{H}_0 + {}^3/_2\,\mathfrak{H}_0{}^2)\,\mathfrak{r}_\mathfrak{r}\\ &- {}^1/_4\,(g_3\,\mathfrak{Z}_0{}^3 - g_2\,\mathfrak{Z}_0{}^2\,\mathfrak{H}_0 + 4\,\mathfrak{H}_0{}^3) \end{aligned}\right\} . \quad (40).$$

4. Allgemeiner, kräftefreier Staude- und Heßkreisel. 8. (a) Die Hauptträgheitsmomente für den allgemeinen Kreisel sind nach (4, 26):

$$A = 2\,e_1 + M,\quad B = 2\,e_2 + M,\quad C = 2\,e_3 + M \quad \ldots \quad (41),$$

so daß $2\,e_1 = A - M,_c$ die Ueberschüsse der Hauptträgheitsmomente über ihr Mittel M sind, und gilt:

$$2\,d_1 = B - C,\quad 2\,d_2 = C - A,\quad 2\,d_3 = A - B \quad \ldots \quad (42).$$

Die Größen g_2, g_3 des Trägheitszweibeins sind durch die Hauptträgheitsmomente einfach ausdrückbar; denn es folgt vermöge (27, 29):

$$2\,g_2 = 4\,(e_1{}^2 + _c) = (A - M)^2 + _c,\quad 2\,g_3 = 8\,e_1\,e_2\,e_3 = (A - M)_c \quad . \quad . \quad (43).$$

Ferner ist nach (23):

$$P = -\,d_2 = e_1 - e_3 = {}^1/_2\,(A - C),\quad Q = d_3 - d_1 = -\,3\,e_2 = -\,{}^3/_2\,(B - M) \quad (44).$$

(b) Durch die Gl. (1): $\mathfrak{y} = \mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + M\,\mathfrak{r}$ ist $\mathfrak{y}$ als Funktion von $\mathfrak{r}$ gegeben. Es ergibt sich $\mathfrak{r}$ umgekehrt als Funktion von $\mathfrak{y}$ wie folgt.

Aus: $\mathfrak{Z}\cdot[\mathfrak{y} = \mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + M\,\mathfrak{r}] = \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + M\,\mathfrak{Z}_\mathfrak{r},\ \mathfrak{H}_\mathfrak{y} = \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + M\,\mathfrak{H}_\mathfrak{r}$ folgen [3])

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{y} = 2\,\mathfrak{H}_\mathfrak{r} + M\,\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + {}^2/_3\,g_2\,\mathfrak{r},\quad \mathfrak{H}_\mathfrak{y} = M\,\mathfrak{H}_\mathfrak{r} + {}^1/_6\,g_2\,\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + g_3\,\mathfrak{r},$$

worauf sich durch Elimination von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_\mathfrak{r}$ aus ihnen und (2) ergibt

$$K\,\mathfrak{r} = \mathfrak{Z}^*_\mathfrak{y} + M^*\,\mathfrak{y},\quad \mathfrak{Z}^* = 2\,\mathfrak{H} - M\,\mathfrak{Z},\ M^* = M^2 - {}^1/_3\,g_2 = {}^1/_3\,(B\,C + _c) \quad . \quad (45),$$

$$K = M^3 - g_2\,M + 2\,g_3 = M^3 + 4\,(e_2\,e_3 + _c)\,M + 8\,e_1\,e_2\,e_3 = (M + 2\,e_1)_c = A\,B\,C \quad (46).$$

---

[1]) Es ist: $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{T} = (30) = d_1{}^2\,d_2{}^2\,d_3{}^2\,[(\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k})\cdot(\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}) = $ P. Art. 8 Beisp. (b) $= {}^4/_3]$.

[2]) Vgl. P. (32).

[3]) Denn es ist hierzu noch nach P. (26):

$$\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} = 2\,\mathfrak{H}_\mathfrak{r} + {}^2/_3\,g_2\,\mathfrak{r},\quad \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} = {}^1/_6\,g_2\,\mathfrak{Z}_\mathfrak{r} + g_3\,\mathfrak{r}.$$

Hierin können $\mathfrak{Z}^*$, M^* als »duales« Trägheitszweibein bzw. als dualer Trägheitsskalar bezeichnet werden[1]).

Es ist $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{p}^* \mathfrak{q}^*$, wo $\mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*$ die »dualen« Trägheitsvektoren sind. Ferner ist:

$$\mathfrak{Z}^* = (45) = 2\,\mathfrak{H} - M\,\mathfrak{Z} = (22, 28, 41) = d_1 A \mathfrak{k}^2 - d_3 C\,\mathfrak{i}^2, \quad \mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^* = \sqrt{d_1 A}\,\mathfrak{k} \pm \sqrt{d_3 C}\,\mathfrak{i} \quad (47),$$

worin noch nach (42): $d_1 = {}^1/_2\,(B - C)$, $d_3 = {}^1/_2\,(A - B)$.

9. Wird in (2) statt $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{r}^{\bullet}$ und $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{n}$ gesetzt, so entsteht die Bewegungsgleichung (14), so daß vermöge (45) folgt

$$K\mathfrak{r}^{\bullet} = \mathfrak{Z}^*{\cdot}(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{n}) + M^*(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{n}) = {}^{2)} = \mathfrak{T}{\cdot}\mathfrak{r}^2 + (M\,\mathfrak{Z}^* + 2\,M^*\,\mathfrak{Z})\,\dot{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{n}} + M^*\,\mathfrak{n} \quad (48).$$

Durch Vollbund mit $\mathfrak{r}$ ergibt sich daher, da $\mathfrak{Z}\,\dot{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{r}^2{\cdot}\mathfrak{r} = {}^{3)} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}{\cdot}\mathfrak{r} = 0$, die Differentialgleichung, wenn noch ${}^1/_2\,\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}\,\mathfrak{r} = |\mathfrak{r}|^2 = w$, das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, also: $\dot{\mathfrak{r}}{\cdot}\mathfrak{r} = {}^1/_2\,(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^{\cdot} = (\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{r})^{\cdot} = \dot{w}$:

$$K\,\dot{w} = 2\,\mathfrak{T}{\cdot}\mathfrak{r}^3 + \mathfrak{Z}^*{\cdot}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) + M^*\,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49).$$

10. Für den kräftefreien Kreisel (Fall von Poisson und Euler) ist $S = 0$, also zunächst nach (1, 13)

$$\mathfrak{Z}_0 = 4\,h - 2\,M\,w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50).$$

Ferner ist nach (10): $\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}$. Durch Vollbund mit $\mathfrak{y}$ folgt hieraus: $\dot{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{y}} = {}^1/_2\,(\mathfrak{y}_{\mathfrak{y}})^{\cdot} = 0$, daher

$$\mathfrak{y}_{\mathfrak{y}} = \text{konst.} = 2\,\Gamma \text{ (Konstanz des Impulses)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (51).$$

Nach (2) ist dann

$$\mathfrak{y}_{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}} + M\,\mathfrak{r}){\cdot}(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}} + M\,\mathfrak{r}) = [\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}{\cdot}\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}} = {}^{3)}\text{ S. } 335 = 2\,\mathfrak{H}_0 + {}^4/_3\,g_2\,w] + 2\,M\,\mathfrak{Z}_0 + 2\,M^2 w$$
$$= 2\,\mathfrak{H}_0 + 2\,({}^2/_3\,g_2 + M^2)\,w + 2\,M\,[\mathfrak{Z}_0 = (50)],$$

daher nach (45, 51)

$$\mathfrak{H}_0 = \Gamma - 4\,M\,h + (M^* - {}^1/_3\,g_2)\,w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52).$$

Ferner ist nach (49, 40) für $\mathfrak{n} = 0$:

$$ {}^1/_4\,K^2\,\dot{w}^2 = (\mathfrak{T}_0)^2 = 64\,G\,x^2\,y^2\,z^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53),$$

$$ {}^1/_4\,K^2\,\dot{w}^2 = {}^{64}/_{27}\,G\,w^3 - ({}^1/_{12}\,g_2{}^2\,\mathfrak{Z}_0{}^2 - 3\,g_2\,\mathfrak{Z}_0\,\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_0{}^2)\,w - {}^1/_4\,(g_3\,\mathfrak{Z}_0 - g_2\,\mathfrak{Z}_0{}^2\,\mathfrak{H}_0 + 4\,\mathfrak{H}_0{}^3) \quad (54),$$

worin nach (50, 52) statt $\mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{H}_0$ das Quadrat w der Winkelgeschwindigkeit eingeführt wird, wodurch in (54) rechts ein Polynom dritten Grades in w auftritt. Dies gibt dann die elliptische Differentialgleichung für w des kräftefreien Kreisels, dargestellt durch die Konstanten der Integrale und die Invarianten g_2 und g_3 der Trägheit des Kreisels.

Zu bemerken wäre, daß sich auch hier, analog zum Falle des schweren symmetrischen Kreisels (s. 2), die Differentialgleichung ergibt, indem das Quadrat der »schiefen« Kovariante $\mathfrak{T}{\cdot}\mathfrak{r}^3$ des Kreisels (die bei Aenderung des Vorzeichens von $\mathfrak{r}$ das Zeichen ändert) durch die »geraden« Kovarianten $\mathfrak{Z}{\cdot}\mathfrak{r}^2$, $\mathfrak{H}{\cdot}\mathfrak{r}^2$ ausgedrückt wird.

11. Im Staudeschen Falle ist $\mathfrak{v}$ permanente Achse, also im Kreisel konstant, daher $\dot{\mathfrak{v}} = 0$, weshalb sich nach (11) ergibt: $\mathfrak{r} = \omega\,\mathfrak{v}$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Nach (14) ist dann

$$\dot{\omega}\,\mathfrak{Z}_{\mathfrak{v}} + M\,\dot{\omega}\,\mathfrak{v} = \omega^2\,\mathfrak{Z}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{v} + S\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55),$$

woraus durch Vollbund mit $\mathfrak{v}$ folgt: $\dot{\omega}\,(\mathfrak{Z}{\cdot}\mathfrak{v}^2 + 2\,M) = 0$, also: $\dot{\omega} = 0$ oder $\omega = \text{konst.}$ Nach (55) ist jetzt: $\omega^2\,\mathfrak{Z}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{v} + S\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e} = 0$, woraus durch Vollbund mit $\mathfrak{e}$ folgt: $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{v}{\cdot}\mathfrak{e} = 0$. Die im Kreisel möglichen Achsen liegen daher auf dem Kegel zweiter Ordnung, dessen Gleichung ist: $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}{\cdot}\mathfrak{e} = 0$ oder $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e}{\cdot}\mathfrak{r} = 0$ oder [4]) $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e}{\cdot}\mathfrak{r}^2 = 0$. Die Gleichung dieses Staudeschen »Schwerpunktkegels« wird daher erhalten, indem das Sphäronom mit

[1]) Das Zweibein $\mathfrak{Z}^*/K = \mathfrak{Z}^*/ABC$ und der Skalar $M^*/K = {}^1/_3\,(1/A + {}_c)$ sind das »reziproke« Trägheitszweibein und der reziproke Trägheitsskalar. Es sei bemerkt, daß die primären optischen Achsen eines Kristalls die Teilvektoren des »dielektrischen« Zweibeins tragen und die sekundären optischen Achsen die Teilvektoren des zu diesem dualen Zweibeins.

[2]) Denn: $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}{\cdot}\mathfrak{Z} = -2\,\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{r}^2$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}{\cdot}\mathfrak{H} = \mathfrak{T}{\cdot}\mathfrak{r}^2 - {}^1/_6\,g_2\,\mathfrak{Z}\,\dot{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{r}^2$.

[3]) Vgl. Fußnote [2]) auf S 333.

[4]) Denn es ist: $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e} = {}^1/_2\,\mathfrak{Z}_{\mathfrak{e}}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{Z}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e}{\cdot}\mathfrak{r}$. Der Kegel ist daher »orthogonal«: er enthält unendlich viele Tripel paarweise aufeinander senkrechter Erzeugenden. Die Gleichung eines jeden Kegels, welcher die Hauptachsen enthält, kann als: $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{e}{\cdot}\mathfrak{r}^2_0 = 0$ geschrieben werden.

dem Zweibein $\mathfrak{Z}\mathfrak{i}\mathfrak{c}$ gleich 0 gesetzt wird[1]). Er hängt sonach nur von den Trägern des Zweibeins $\mathfrak{Z}$ und des Schwerpunktsvektors ab, ist orthogonal und derselbe für alle Kreisel, deren Schwerpunkte auf derselben Geraden durch O liegen und dasselbe Trägheitszweibein besitzen, also dieselben Hauptachsen, und die entsprechend gleichen Ueberschüsse: $2\,e_1 = A - M,_c$ der Hauptträgheitsmomente über deren Mittel M haben.

Im Heßschen Falle liegt der Schwerpunkt auf einem der Träger der dualen Trägheitsvektoren $\mathfrak{y}^*$, $\mathfrak{q}^*$ (s. Art. 8)[2]). Der Schwerpunktskegel zerfälllt dann in die Ebene des Zweibeins $\mathfrak{Z}$, die zu $\mathfrak{j}$ senkrecht ist, und in eine zu ihr senkrechte Ebene E, wie bekannt. In der Tat ist

$$[\mathfrak{Z} = (22) = d_3\,\mathfrak{i}^2 - d_1\,\mathfrak{k}^2]\,\mathfrak{i}\,[\mathfrak{y}^* = (47)] = -\sqrt{d_1\,d_3}\,(\sqrt{d_3\,A}\,\mathfrak{i} + \sqrt{d_1\,C}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{j}.$$

Nun ist $\sqrt{d_1 A}\,\mathfrak{i} + \sqrt{d_1\,C}\,\mathfrak{k} = (A\sqrt{d_1\,C}\,\mathfrak{i} + C\sqrt{d_1\,A}\,\mathfrak{k})/\sqrt{A\,C}$; der Vektor $A\sqrt{d_3\,C}\,\mathfrak{i} + C\sqrt{d_1\,A}\,\mathfrak{k}$ ist daher senkrecht zu E. Da er sich aber als Impuls für die Rotation $\mathfrak{x} = \sqrt{d_3\,C}\,\mathfrak{i} + \sqrt{d_1\,A}\,\mathfrak{k} = \mathfrak{y}^*$ ergibt, folgt, daß E senkrecht ist zum Impulse für die Rotation $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}^*$. Die den Rotationen $\mathfrak{x}$, welche in E fallen, entsprechenden Impulse sind senkrecht $\mathfrak{y}^*$, also senkrecht zum Schwerpunktsvektor, dem Ausgangspunkt bei Klein und Sommerfeld (S. 379) entsprechend. 422

Über die Totlagen des Gelenkvierecks.

Von **H. ALT** in Dresden.

In der vorliegenden Arbeit behandle ich eine Fragestellung, die für die technischen Anwendungen, insbesondere auf dem Gebiete der Arbeitsmaschinen, von einschneidender Bedeutung ist. Um das von vornherein deutlich hervortreten zu lassen, will ich die erwähnte Fragestellung an zwei Beispielen erläutern. Beim Bau von Arbeitsmaschinen benutzt man das Gelenkviereck sehr häufig für zwei verschiedene Zwecke. Bei dem einen wird es dazu verwendet, um eine vorgelegte, meist gleichförmige Drehbewegung in eine hin und hergehende Drehbewegung überzuführen. Während die Kurbel AB (Abb. 1) volle Umdrehungen ausführen kann, kann die Schwinge DC sich nur zwischen zwei Grenzen, die man die Totlagen nennt, hin und herbewegen. Der Drehwinkel zwischen den Totlagen der Schwinge DC sei φ und der entsprechende Drehwinkel der Kurbel AB sei ψ, wobei festgesetzt werden möge, daß ψ im Uhrzeigersinn von der inneren Totlage B_i bis zur äußeren Totlage B_a zu messen ist. Es wird nun die Aufgabe gestellt, die Abmessungen eines Gelenkviereckes, dessen Festpunkte A und D (d. h. dessen Steg AD) gegeben sind, so zu ermitteln, daß die definierten Winkel φ und ψ vorgeschriebene Werte annehmen.

Eine andere technisch wichtige Anwendung des Gelenkviereckes ist die als Antrieb von Schaltmechanismen (Abb 2). Auch hier soll aus einer gleichförmigen Drehbewegung

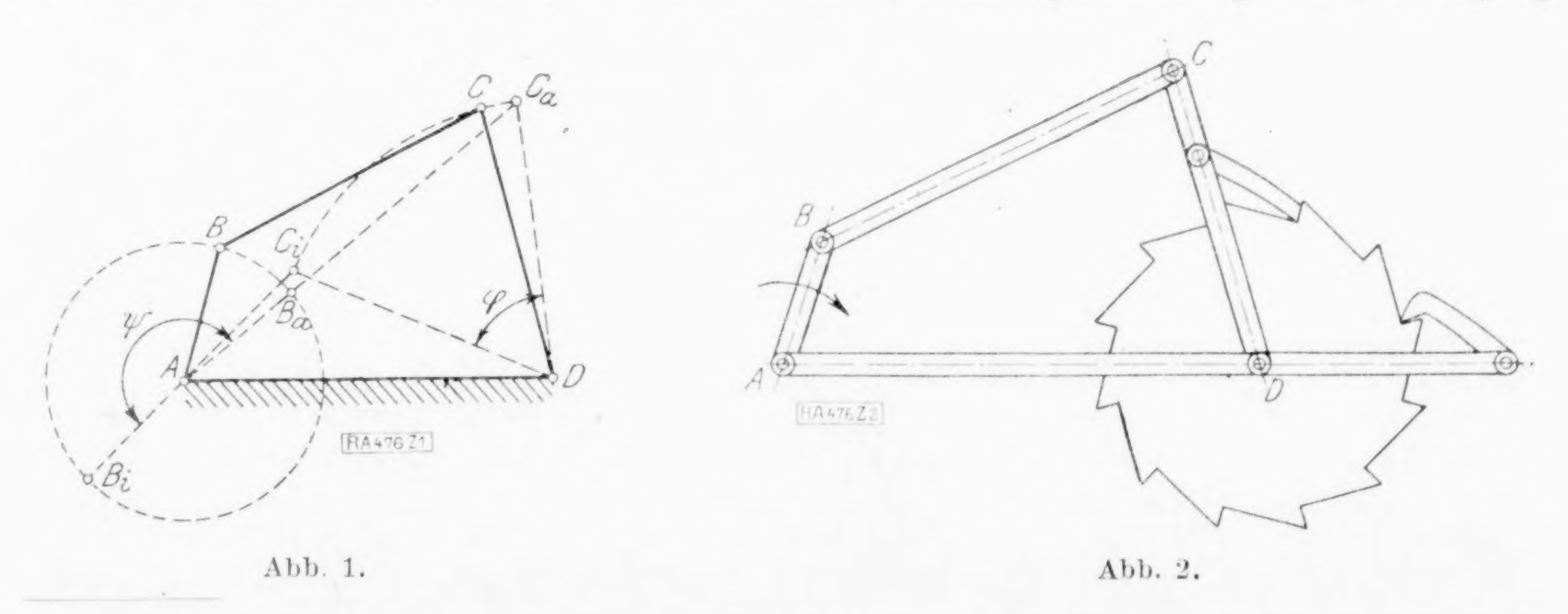


Abb. 1. Abb. 2.

[1]) Die Staudesche »Schwerpunktskurve«, d. i. die Schnittkurve des Schwerpunktskegels mit der Einheitskugel, ist demnach identisch mit der »Knotenlinie« Maxwells dieser Kugelfunktion. (S. l. c. S. 218).

[2]) So kann der Satz von Joukowsky (s. Klein und Sommerfeld II, S. 380) ausgesprochen werden, da nach Art. 3 der Vektor $\mathfrak{y}^*$ senkrecht steht auf einer Kreisschnittebene des reziproken Trägheitsellipsoids.

der Kurbel AB eine hin und hergehende Drehbewegung der Schwinge DC abgeleitet werden. Der Drehwinkel φ der Schwinge DC zwischen den Totlagen, der hier Schaltwinkel genannt wird, und der entsprechende Drehwinkel ψ der Antriebskurbel AB müssen bei den praktischen Anwendungen vorgeschriebene Werte besitzen und zwar deshalb, weil man von der Gesamtdauer einer vollen Umdrehung der sich gleichförmig drehenden Antriebskurbel, d. h. der Zeit eines Arbeitsspieles, einen vorgeschriebenen Teil auf die Schaltbewegung und den Rest auf die Ruheperiode des Schaltrades, bzw. auf die Zurückführung der Schaltklinke zu rechnen hat. Auch hier gelangen wir zu der Aufgabe, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden soll, die Abmessungen eines Gelenkviereckes von gegebenen Festpunkten so zu ermitteln, daß die zwischen den Totlagen liegenden Drehwinkel φ bzw. ψ von Schwinge bzw. Kurbel vorgeschriebene Werte besitzen. Diese Fragestellung habe ich bereits früher [1]) formuliert, aber noch nicht eingehend untersucht.

Für die Behandlung der Aufgabe kann man analytische oder geometrische Hilfsmittel verwenden. Ich will hier vom Burmesterschen Satz ausgehen und zwar hauptsächlich deshalb, weil sich dann das Ergebnis als Sonderfall einer schon bekannten allgemeinen Ueberlegung darstellt.

1. Die geometrisch-kinematischen Grundlagen. Sind vier verschiedene Lagen $E_1 \ldots E_4$ einer komplan bewegten Ebene E vorgelegt, so lassen sich in diesen Lagen Gruppen von vier entsprechenden Punkten ermitteln, die auf je einem Kreise liegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen, wie Burmester [2]) gezeigt hat, auf einer zirkularen Kurve dritten Grades, der sogen. Mittelpunktkurve, für die Burmester eine einfache Konstruktion angegeben hat. Diese Mittelpunktkurve zerfällt unter besonderen Verhältnissen, die im vorliegenden Falle von Bedeutung sind und auf die ich deshalb noch eingehen werde, in einen Kreis und eine Gerade.

Betrachtet man zunächst nur zwei der vier Lagen $E_1 \ldots E_4$, etwa E_1 und E_2, so kann man den Pol der Ebenen E_1 und E_2 ermitteln, d. h. denjenigen Punkt P_{12}, der als Drehpunkt für diejenige Drehung benutzt werden kann, durch welche die Ebene E aus der Lage E_1 in die Lage E_2 übergeführt werden kann. Daher erhält man den Pol P_{12} zweier Ebenen E_1 und E_2 als Schnittpunkt der Mittellote je zweier entsprechender Punkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 (Abb. 3). Bei den vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 ergeben sich also insgesamt die sechs Pole P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24}, P_{34}. Je zwei dieser Pole, deren Indizes keine gleichen Ziffern besitzen, nennt man Gegenpole. Durch zwei Paar Gegenpole ist die Mittelpunktkurve bestimmt. Auf deren allgemeine Konstruktion einzugehen, ist an dieser Stelle nicht erforderlich, da hier nur ein Sonderfall gebraucht

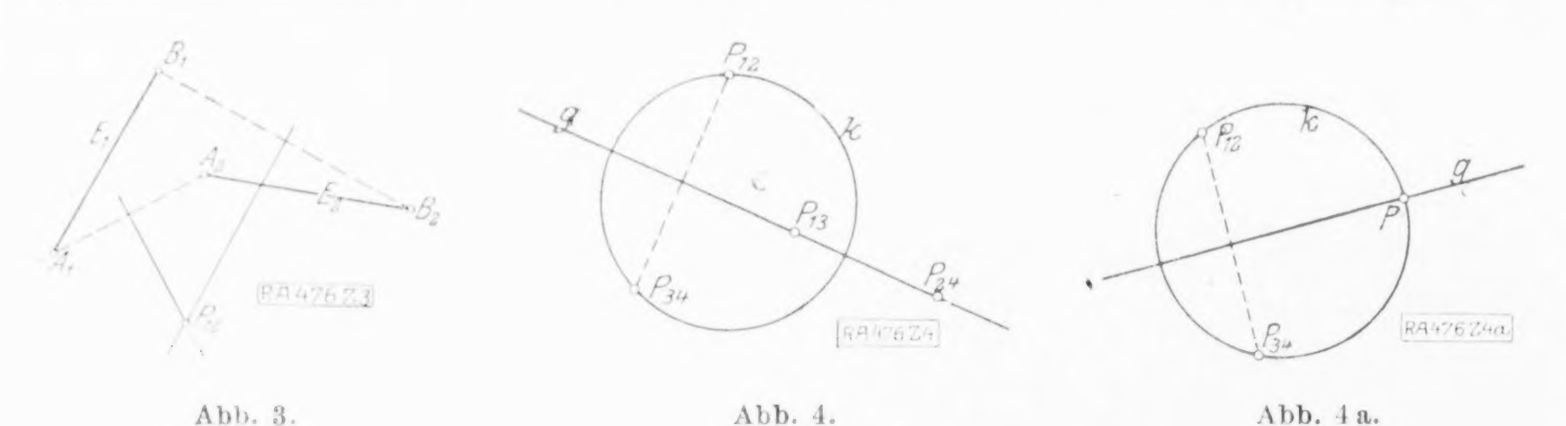


Abb. 3. Abb. 4. Abb. 4 a.

wird. Wenn zwei Gegenpole, etwa P_{12} und P_{34} symmetrisch bezüglich der Verbindungslinie zweier anderer Gegenpole, etwa P_{13} und P_{24}, liegen (Abb. 4), dann entartet die Mittelpunktkurve in die durch P_{13}, P_{24} gehende Gerade g und denjenigen Kreis k durch P_{12} und P_{34}, der die Strecke $P_{13}\,P_{34}$ harmonisch teilt. Fallen im besonderen noch die Pole P_{13} und P_{24} in einem Punkte P zusammen (Abb. 4a), so ist die Gerade g das durch P gehende Mittellot zu $P_{12}\,P_{34}$ und der Kreis k geht dann durch die drei Punkte P, P_{12}, P_{34}. Wenn schließlich auch noch die Punkte P_{12} und P_{34} in einem Punkte Q zusammenfallen, dann ist PQ die Gerade g und der Kreis über dem Durchmesser PQ der Kreis k.

[1]) H. Alt, Zur Synthese der ebenen Mechanismen, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 1921, S. 390. — Einige Aufgaben aus der kinematischen Synthese, Maschinenbau 1924, Heft 11, S. 357.

[2]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 607 bis 621.

Nun ist noch eine andere Aufgabe zu erörtern. Gegeben seien je vier Lagen E_1, E_2, E_3, E_4 bzw. F_1, F_2, F_3, F_4 zweier Ebenen E bzw. F als einander zugeordnet und es werde gefordert, beide Ebenen durch eine dritte Ebene G gelenkig zu verbinden. Dann müssen die Gelenkpunkte C und D (Abb. 5) so ermittelt werden, daß ihre Entfernung in sämtlichen vier Lagen der Ebenen E und F die gleiche ist, oder daß die Relativlagen des Punktes D gegen eine der Lagen der Ebene E, etwa E_1, auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt der Punkt C_1 ist. Wir haben daher die Relativlagen der Ebene F gegen eine Lage E_1 der Ebene E zu ermitteln und für diese Relativlagen die Mittelpunktkurve aufzusuchen, die dann der geometrische Ort der Punkte C_1 ist. Man kann natürlich auch umgekehrt verfahren, indem man die Relativlagen der Ebene E gegen die Lage F_1 der Ebene F und für diese Relativlagen die Mittelpunktkurve aufsucht, die dann der geometrische Ort für den Punkt D_1 ist. Das Aufsuchen der Relativlage etwa der Ebene E_2 gegen die Ebene F_1 erfolgt in der Weise, daß man das aus E_2 und F_2 bestehende Gebilde vorübergehend als eine starre Verbindung betrachtet und derart bewegt, bis F_2 mit F_1 zusammenfällt, wobei dann E_2 in die gesuchte Relativlage von E_2 gegen F_1 gelangt.

Abb. 5.

2. Anwendung auf die Totlagen des Gelenkviereckes. Die Totlagen des Gelenkviereckes lassen sich durch zwei wesentliche Eigenschaften kennzeichnen, von denen jede für sich eine notwendige und hinreichende Bedingung darstellt. Die eine Eigenschaft ist die, daß in den Totlagen die drei Punkte A, B, C in einer Geraden liegen. Liegt dabei B zwischen A und C, so handelt es sich um die äußere Totlage (Abb. 6a), die ich mit dem Index a bezeichnen will, liegt dagegen A zwischen B und C, so handelt es sich um die innere Totlage (Abb. 6b), gekennzeichnet durch den Index i. Die zweite Eigenschaft besteht darin, daß in jeder Totlage zwei zusammenfallenden Lagen der Schwinge DC zwei unendlich benachbarte Lagen der Antriebskurbel AB entsprechen. Von diesen beiden Eigenschaften wird im folgenden Gebrauch gemacht werden.

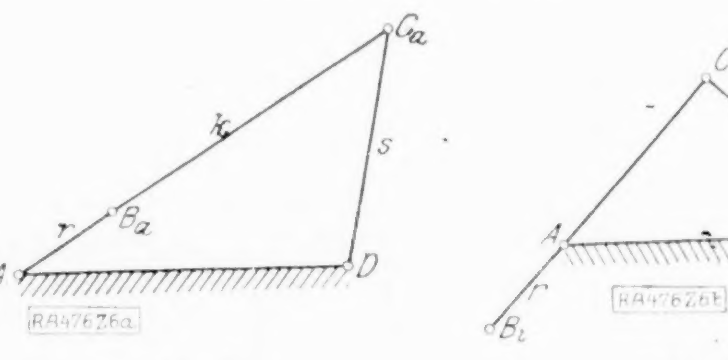


Abb. 6a.

Abb. 6b.

Die beiden Lagen der Kurbelebene sowie diejenigen der Schwingenebene in der inneren Totlage sollen mit 1, 2 und diejenigen in der äußeren Totlage mit 3, 4 bezeichnet werden. Die Ebene der Kurbel bzw. der Schwinge soll durch je eine durch A bzw. D gehende Gerade dargestellt sein und zwar sollen der Einfachheit wegen die Lagen 1, 2 von Kurbel und Schwinge in die Gerade AD gelegt werden (Abb. 7). Durch die gegebenen Winkel φ und ψ sind dann auch die Lagen 3, 4 festgelegt. Um die Ebenen von Kurbel und Schwinge völlig zu bestimmen, wähle ich in jeder noch einen Punkt X und Y in beliebigem Abstande vom Drehpunkte A bzw. D (Abb. 7).

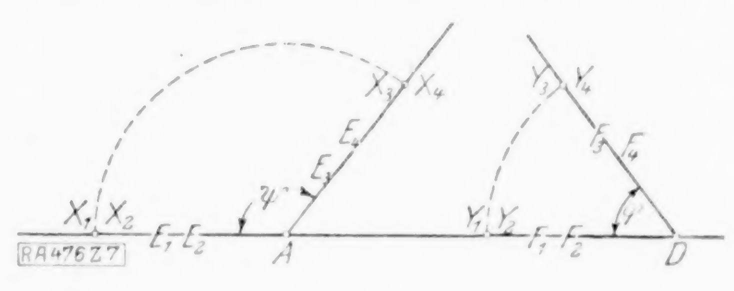


Abb. 7.

Zunächst will ich den geometrischen Ort der Punkte C_i ermitteln. Zu diesem Zwecke sind die Relativlagen der Ebene AX gegen die Lage DY_1 aufzusuchen. Die Relativlagen E_1' bzw. E_2' von E_1 bzw. E_2 gegen F_1 fallen mit E_1 bzw. E_2 zusammen. Die Relativlage X_3', X_4' von X_3, X_4 gegen die Ebene F_1 erhalten wir als Schnittpunkt des um D geschlagenen und durch X_3, X_4 gehenden Kreises mit der durch D gehenden Geraden, die mit DX_3, X_4 den gegebenen Winkel φ einschließt (Abb. 8). Ebenso ergibt sich die Relativlage A_3', A_4' des Punktes A, aufgefaßt als Punkt der Ebenen E_3 und E_4, die auf dem durch A gehenden Kreise um D und der durch D gehenden Geraden liegt, die mit AD den Winkel φ einschließt. Hierbei ist der Winkel φ in den Sinne auf-

zutragen, in dem die Ebene F_3, F_4 bei einer Drehung um den Winkel φ in die Lage F_1, F_2 gelangt. Damit sind die vier Relativlagen E_1', E_2', E_3', E_4' der Ebene E gegen die Lage F_1 der Ebene F bestimmt, und zwar sind E_1', E_2' identisch mit E_1, E_2, während man E_3', E_4' nach der angegebenen Konstruktion (Abb. 8) findet.

Für diese vier Relativlagen sind die Relativpole zu ermitteln. Da E_1 und E_2 zwei unendlich benachbarte Lagen der Ebene E sind, die durch Drehung um den Punkt A ineinander übergehen können, so ist A der Relativpol R_{12}. Ganz entsprechend folgt, daß

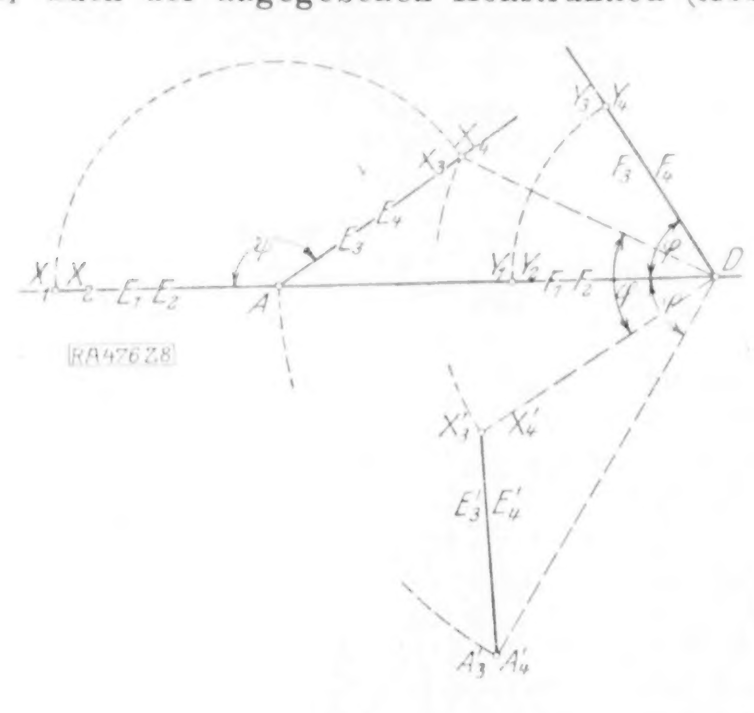


Abb. 8.

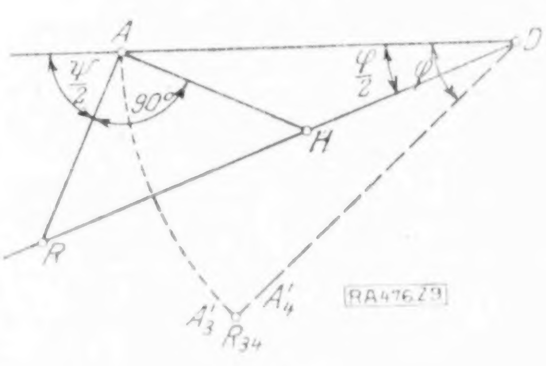


Abb. 9.

der Relativpol R_{34} in den Punkt A_3', A_4' fällt. Die übrigen Relativpole R_{13}, R_{23}, R_{14}, R_{24} müssen hier, wie unmittelbar zu erkennen ist, in einem Punkte R zusammenfallen, den man, wie ich an anderer Stelle[1]) gezeigt habe, als Schnittpunkt der beiden Geraden findet, die man durch A unter dem Winkel $^1/_2\,\psi$ und durch D unter dem Winkel $^1/_2\,\varphi$ gegen AD zieht (Abb. 9). Auch hierbei sind die Winkel $^1/_2\,\varphi$ und $^1/_2\,\psi$ in dem Sinne an AD anzutragen, in welchem die Lagen 3, 4 der Schwinge bzw. der Kurbel bei einer Drehung um den Winkel φ bzw. ψ in die Lagen 1, 2 übergehen. Damit sind die sämtlichen sechs Pole der Relativlagen der Kurbelebene E gegen die Lage F_1 der Schwingenebene F gefunden. Die Mittelpunktkurve, die zu diesen Relativlagen gehört und die der geometrische Ort der Punkte C_i ist, zerfällt hier, wie die Untersuchungen des 1. Abschnittes erkennen lassen, in die Gerade DR und den Kreis k durch die Punkte A, R, R_{34}. Die Punkte R_{34} und A sind symmetrisch bezüglich DR gelegen. Wenn man durch A zu AR die Senkrechte zieht, die RD in H schneiden möge, so ist RH der Durchmesser des Kreises k, den ich hier, da er zum geometrischen Ort des Punktes C_i gehört, mit c_i bezeichnen will.

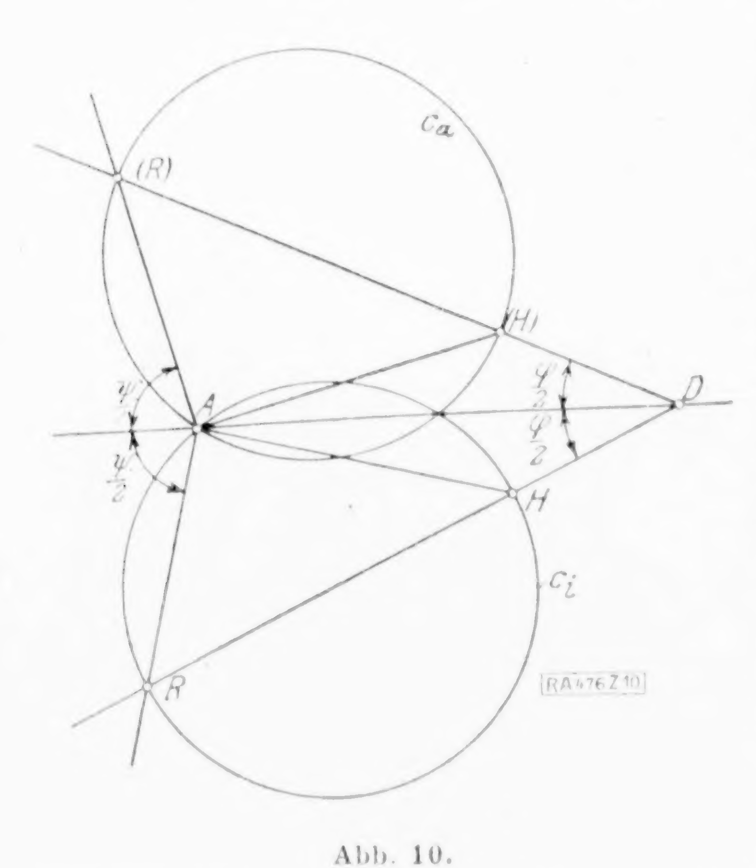


Abb. 10.

Da der geometrische Ort der Punkte C_a demjenigen der Punkte C_i kongruent ist und aus ihm durch eine Drehung um den Winkel φ mit D als Drehpunkt hervorgeht und da der Durchmesser RH des Kreises c_i mit AD den Winkel $^1/_2\,\varphi$ einschließt, so sind die geometrischen Oerter von C_i und C_a symmetrisch bezüglich der Geraden AD (Abb. 10). Man kann nun zeigen, daß die Gerade DR als Teil des geometrischen Ortes der Punkte C_i eine unbrauchbare Lösung darstellt. Bezeichnet man die Längen der Antriebskurbel AB, der Schwinge DC und der Koppel BC mit r, s bzw. k, so ergeben sich aus Abb. 6a und 6b die Beziehungen

$$A\,C_a = k + r, \qquad A\,C_i = k - r,$$

woraus $$r = {}^1/_2\,(A\,C_a - A\,C_i)$$

[1]) H. Alt, Zur Synthese der ebenen Mechanismen, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 1921, S. 384.

folgt. Da nun jedem Punkte C_i der Geraden $R\,D$ ein bezüglich $A\,D$ symmetrisch gelegener Punkt C_a der Geraden $D\,(R)$ entspricht, der von A dieselbe Entfernung wie der entsprechende Punkt C_i hat, so ergibt sich für alle Punkte C_i der Geraden $D\,R$ und ebenso für alle Punkte C_a der Geraden $D\,(R)$ der Wert $A\,B = r = 0$, der kein brauchbares Gelenkviereck liefert.

Um den geometrischen Ort der Kurbelgelenkpunkte B_i in der inneren Totlage zu finden, verfahren wir ebenso wie bei der Behandlung des Punktes C_i, nur haben wir jetzt nicht die Relativlagen der Kurbelebene E gegen die Lage F_1 der Schwinge F, sondern umgekehrt die Relativlagen der Ebene F gegen die Ebene E_1 zu ermitteln[1]). Wesentlich ist hierbei die bereits erwähnte Eigenschaft, daß in den Totlagen zwei zusammenfallenden Stellungen der Schwinge zwei unendlich benachbarte Lagen der Kurbel entsprechen.

Die Pole der Relativbewegung der Schwinge F gegen die Lage E_1 der Kurbel E will ich zur Unterscheidung von den oben benutzten Relativpolen durch Striche kennzeichnen. Dann fallen auch hier die Relativpole R_{13}', R_{14}', R_{23}', R_{24}' in einem Punkte R' zusammen. Da die betrachteten Relativlagen immer auf die Lage 1 der Schwinge F bzw. der Kurbel E bezogen wurden, so sind die Relativpole R_{13}' und R_{13} identisch, ebenso die Relativpole R_{14}' und R_{14} und auch die Relativpole R_{12}' und R_{12}, so daß R_{12}' nach A fällt (Abb. 11). Daraus folgt, daß auch der Punkt R' mit R zusammenfällt. Dagegen muß der Relativpol R_{34}' noch besonders bestimmt werden. Die Relativlage F_3' der Ebene F_3 gegen die Ebene E_1 wird erhalten, indem man das aus E_3 und F_3 bestehende, vorübergehend als starr betrachtete Gebilde zurückbewegt, bis E_3 mit E_1 zusammenfällt. Dabei gelangt F_3 in die gesuchte Relativlage F_3'. Das Entsprechende gilt für F_4. Nun sind aber F_3 und F_4 wirklich identisch, während die Ebenen E_3 und E_4 erst durch Drehung um einen unendlich kleinen Drehwinkel um den Drehpunkt A ineinander übergeführt werden können. Hieraus folgt, daß auch die Relativlagen F_3' und F_4' unendlich benachbart sind und ebenfalls erst durch Drehung um den gleichen unendlich kleinen Drehwinkel um A als Drehpunkt ineinander übergehen. Infolgedessen ist der Relativpol R_{34}' der Momentanpol und fällt mit A zusammen. Wir sehen also, daß von den sechs Relativpolen vier (R_{13}', R_{23}', R_{14}', R_{24}') in den Punkt R und die beiden anderen (R_{12}', R_{34}') in den Punkt A fallen. Die gesuchte Mittelpunktkurve für die Relativlagen zerfällt daher in den Kreis b_i mit dem Durchmesser $A\,R$ und in die Gerade $A\,R$ (Abb. 11). Dieser

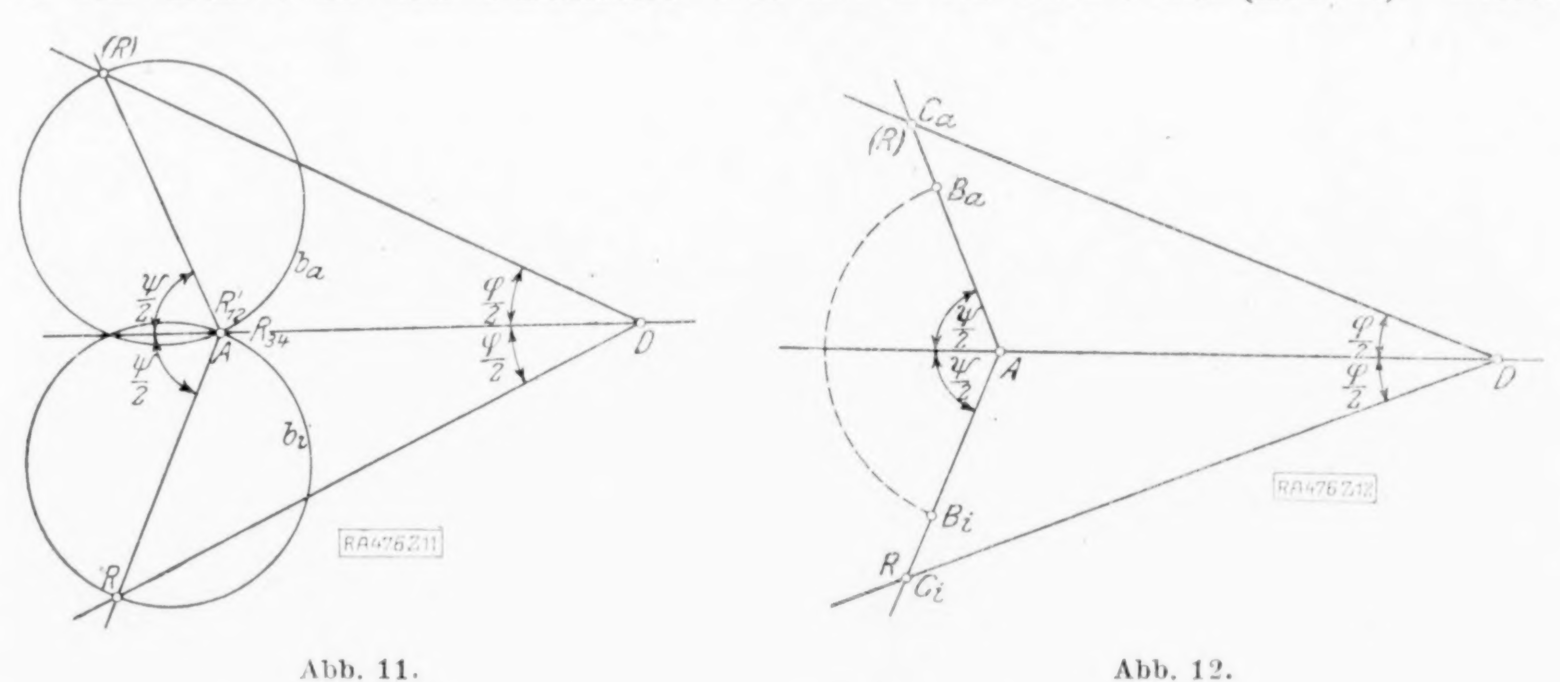


Abb. 11. Abb. 12.

Mittelpunktkurve, die der geometrische Ort der Punkte B_i ist, entspricht als geometrischer Ort der zugeordneten Punkte B_a der äußeren Totlage ein Kreis b_a und eine Gerade $A\,(R)$, die beide zum Kreise b_i bzw. zur Geraden $A\,R$ bezüglich $A\,D$ symmetrisch gelegen sind (Abb. 11).

Auch hier kann man zeigen, daß die Punkte der Geraden $A\,R$ unbrauchbare Lösungen liefern. Da in den Totlagen die drei Punkte A, B, C in einer Geraden liegen

[1]) Man kann auch anders vorgehen, indem man die Kreispunktkurve verwendet. Wird der geometrische Ort der Punkte C_i als Mittelpunktkurve aufgefaßt, dann ist die zugeordnete Kreispunktkurve in der Lage 1 der geometrische Ort der Punkte B_i.

müssen und der Winkel $C_i D C_a$ gleich φ sein muß, so folgt, daß allen Punkten B_i der Geraden $A R$ der gleiche mit R zusammenfallende Punkt C_i und ebenso der gleiche mit (R) zusammenfallende Punkt C_a entspricht (Abb. 12). Wenn aber eine Bewegung des Gelenkviereckes von der inneren nach der äußeren Totlage möglich sein soll, so muß

$$A B_a = A B_i = r = {}^1/_2 (A C_a - A C_i)$$

sein, woraus $r = 0$ folgt, da hier $A C_a = A C_i$ ist. Wir sehen also, daß die Punkte B_i der Geraden $A R$ und ebenso die Punkte B_a der Geraden $A (R)$ den unbrauchbaren Wert $A B = r = 0$ ergeben, so daß als geometrische Oerter der Punkte B_i bzw. B_a nur die beiden Kreise b_i bzw. b_a in Betracht kommen.

Von den vier Kreisen c_i, c_a, b_i, b_a, die wir als geometrische Oerter der Punkte C_i, C_a, B_i, B_a gefunden haben, sind jedoch nicht alle Punkte verwendbar. Die Abmessungen eines Gelenkviereckes, das hier nach Voraussetzung als Kurbelschwinge arbeiten soll, unterliegen den Bedingungen des Grashofschen Satzes[1]), und zwar muß hier die Antriebskurbel $A B = r$ das kleinste Glied und ferner muß die Summe der größten und der kleinsten Gliedlänge kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen sein. Diese zweite Bedingung ist im vorliegenden Falle immer erfüllt, wenn die erste befriedigt ist. Um zu untersuchen, für welche Teile der gefundenen geometrischen Oerter das Glied $A B = r$ das kleinste ist, will ich die beiden Kreise b_a und c_a herausgreifen, also die äußere Totlage betrachten (Abb. 13). Das von A auf $D (R)$ gefällte Lot schneidet den Kreis c_a in einem Punkte L und den Kreis b_a in einem Punkte N der Geraden $D (R)$ und es ist $A N = N L$. Schreitet man von A aus auf den Kreisen b_a und c_a entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn vorwärts, so enthält der Bogen $A N$ des Kreises b_a und der Bogen $(H) L$ des Kreises c_a die nach dem Grashofschen Satze allein brauchbaren Punkte, denn nur für die Punkte C_a, die auf dem Kreisbogen zwischen (H) und L liegen, ist $A B$ kleiner als $B C$. Für die Punkte C_a, die zwischen L und (R) liegen, ist $A B$ größer als $B C$, und für die Punkte C_a zwischen A und (H) ergeben sich, da $A (H)$ den Kreis b_a berührt, Punkte B_a, die nicht zwischen A und C_a liegen, wie es gemäß der Definition der äußeren Totlage erforderlich ist.

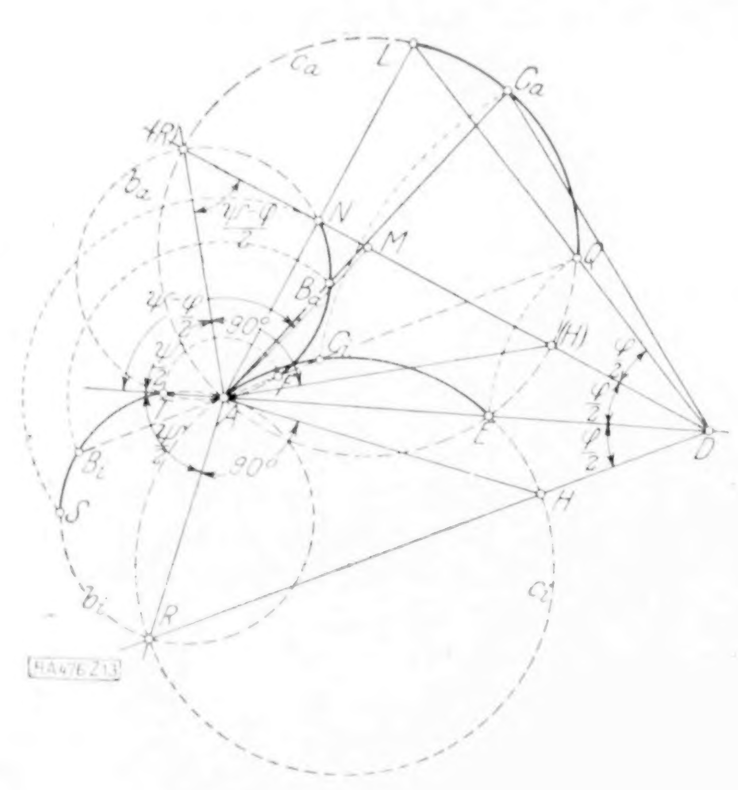


Abb. 13.

Jedoch sind auch nicht alle Punkte des Kreisbogens $(H) L$ verwendbar. Da einem Punkte C_a, der mit (H) zusammenfällt, eine Kurbellänge $A B = r = 0$ entspricht, würde sich das entsprechende Gelenkviereck überhaupt nicht bewegen, also auch die Schwinge $D C$ sich nicht um den vorgeschriebenen Winkel ψ in die andere Totlage drehen können. Alle diejenigen Gelenkvierecke, bei denen der von C beschriebene Kreisbogen zwischen C_a und C_i von der Geraden $A L$ geschnitten wird, sind unbrauchbar. Kennt man die Festpunkte A und D und die Abmessungen $A B = r$, $B C = k$, $C D = s$ eines Gelenkviereckes, das als Kurbelschwinge arbeiten soll, so erhält man die äußere Totlage, indem man um A mit $k + r$ und die innere Totlage, indem man um A mit $k - r$ den Kreis schlägt. Der mit s um D geschlagene Kreis schneidet den ersten Kreis in C_a und C_a' und den zweiten in C_i und C_i' (Abb. 14). Hat man dann einen der äußeren Totlagenpunkte, etwa C_a, als Ausgangspunkt gewählt, so sind zwar geometrisch noch die beiden inneren Totlagen C_i und C_i' möglich, nicht aber kinematisch; denn bei dem Gelenkviereck kann der Punkt C nicht von C_i nach C_i' gelangen, da die Kreise, die man um die auf dem Kreisbogen zwischen C_i und C_i' liegenden Punkte mit dem Radius k schlägt, den um A mit r geschlagenen Kreis überhaupt nicht schneiden. Wir sehen also, daß der Punkt C_i auf derselben Seite der Geraden $A D$ liegen muß, wie der Punkt C_a.

[1]) F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1883, Bd. II, S. 117. — L. Burmester, a. a. O. S. 287.

Wir haben nun mehrere Fälle zu betrachten, die sich durch die Lage des Punktes D zum Kreise c_a unterscheiden.

a) Der Punkt D liegt außerhalb des Kreises c_a. Hier ist ψ kleiner als 180^0. Der Winkel, der die Verbindungslinie von A und dem Mittelpunkte M des Kreises c_a mit der Richtung DA der Geraden DA einschließt, hat die Größe $\psi - \varphi/2$ (Abb. 13). Ist dieser Winkel größer als 90^0, dann schneidet die Gerade DL den Kreis c_a in einem zweiten Punkte Q, der zwischen (H) und L liegt. In diesem Falle liefern alle Punkte C_a des Kreisbogens QL brauchbare Gelenkvierecke.

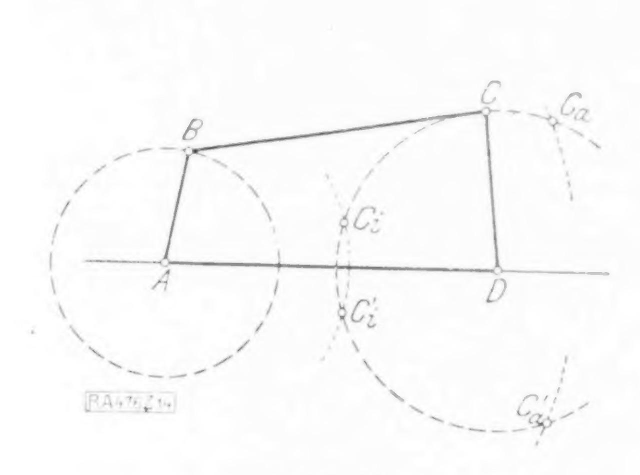


Abb. 14.

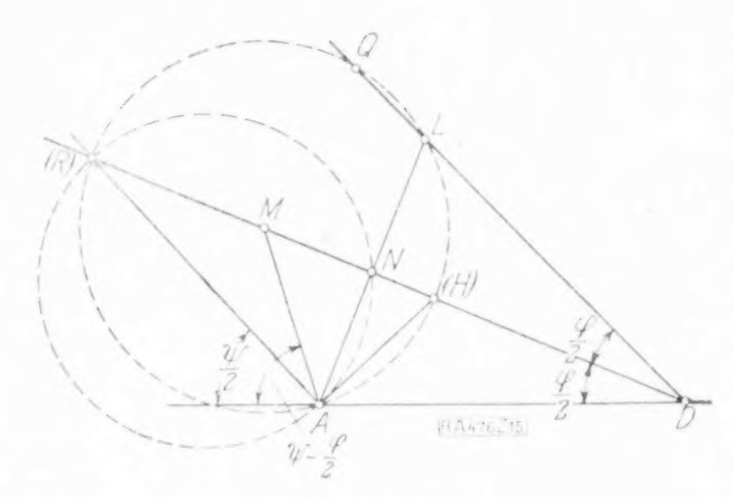


Abb. 15.

Wenn dagegen $\psi - \varphi/2$ kleiner als 90^0 ist (Abb. 15), dann liegt Q zwischen L und (R) und es ergibt sich kein brauchbares Gelenkviereck. Es muß also die Bedingung $\psi - \varphi/2 > 90^0$ erfüllt sein. Da offensichtlich diese Beziehung nicht nur für ψ, sondern auch für $360^0 - \psi$ gilt, so finden wir, daß

$$90^0 + \varphi/2 < \psi < 270^0 - \varphi/2$$

sein muß. Da ferner stets der Winkel $A(R)D < 90^0$ sein muß (Abb. 13), so folgt $\psi - \varphi < 180^0$ oder $\psi < 180^0 + \varphi$. Wir haben also die drei Bedingungen zu beobachten, daß

$$\psi > 90^0 + \varphi/2\,, \quad \psi < 270^0 - \varphi/2\,, \quad \psi < 180^0 + \varphi$$

sein muß. Wir finden daher, daß z. B. für $\varphi = 40^0$

$$\psi > 110^0\,, \quad \psi < 240^0\,, \quad \psi < 220^0$$

ist, so daß ψ zwischen den Grenzen 110^0 und 220^0 liegt. Ist dagegen $\varphi = 120^0$ gegeben, so wird

$$\psi > 150^0\,, \quad \psi < 210^0\,, \quad \psi < 300^0.$$

Hier liegt also ψ zwischen den Grenzen 150^0 und 210^0. Je kleiner der Winkel φ ist, um so größer ist der Bereich für den entsprechenden Winkel ψ.

Um die dem Kreisbogen QL entsprechenden Bögen der Kreise b_a, c_i, b_i zu ermitteln, verbindet man Q mit A und erhält als Schnittpunkt mit dem Kreise b_a den Punkt F (Abb. 13). Dann liegen auf dem Kreisbogen FN die sämtlichen brauchbaren Punkte B_a. Ist E der zweite Schnittpunkt der Geraden AD mit dem Kreise c_i, so enthält dessen Bogen EA alle brauchbaren Punkte C_i. Bezeichnet man schließlich mit S den Schnittpunkt des Kreises b_i mit dem um A geschlagenen durch N gehenden Kreise, wobei der Winkel $NAS = \psi$ sein muß (Abb. 13), und bezeichnet man mit T den auf der Geraden AD liegenden zweiten Schnittpunkt der Kreise b_a und b_i, so liegen auf dem Bogen TS des Kreises b_i alle brauchbaren Punkte B_i.

b) Der Punkt D liegt auf dem Kreise c_a. Hier ist $\psi = 180^0$ Die brauchbaren Kreisbögen sind die folgenden (Abb. 16):

auf c_a: DL, auf b_a: AN, auf c_i: DA, auf b_i: AS.

Hierbei liegt S auf der Geraden NA.

c) Der Punkt D liegt innerhalb des Kreises c_a. Hier ist $\psi > 180^0$, so daß die oben gefundene Bedingung $\psi > 90^0 + \varphi/2$ immer erfüllt ist, da φ stets kleiner als 180^0 ist. Die um A mit AT bzw. AN (Abb. 17) geschlagenen Kreise schneiden den Kreis b_i in den Punkten U bzw. S, die man auch erhält, wenn man die Strahlen AT bzw. AN um den Punkt A um den Winkel ψ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn dreht. Dreht man ferner im gleichen Sinne den Strahl DE um D um den Winkel φ, so gelangt

E nach dem Punkte V des Kreises c_a. Dann sind die brauchbaren Kreisbögen die folgenden (Abb. 17):

auf c_a: EL, auf b_a: TN, auf c_i: VA, auf b_i: US.

Die gefundenen Ergebnisse führen also zu folgender Konstruktion. Durch A und D legen wir je zwei Gerade, die mit AD die Winkel $^1/_2\,\psi$ bzw. $^1/_2\,\varphi$ einschließen (Abb. 13), und erhalten dabei die Schnittpunkte R und (R). Durch A ziehen wir zu AR und $A(R)$ die Lote, die DR bzw. $D(R)$ in H bzw. (H) schneiden, und zeichnen dann die vier Kreise c_a, b_a, c_i, b_i mit $(H)(R)$, $A(R)$, HR, AR als Durchmesser. Auf diesen Kreisen ermitteln wir in der angegebenen Weise die für die Lösung der Aufgabe brauchbaren Kreisbögen. Wählt man dann auf dem brauchbaren Bogen des Kreises c_a einen beliebigen Punkt C_a, so schneidet die Gerade $C_a A$ den Kreis b_a im zugeordneten Punkte B_a (Abb. 17).

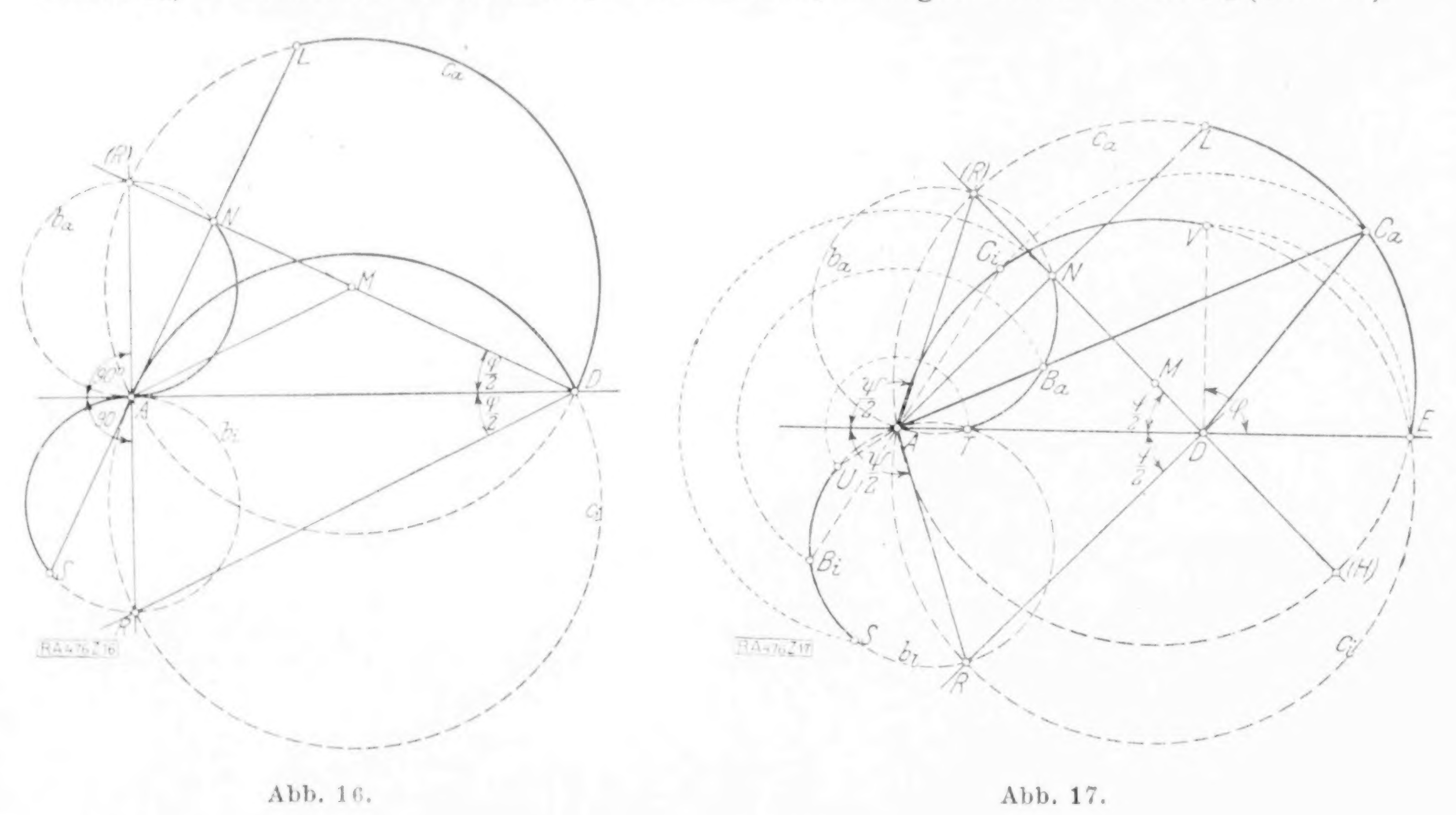


Abb. 16. Abb. 17.

Damit sind die Abmessungen $AB_a = r$, $B_a C_a = k$, $DC_a = s$ eines Gelenkvierecks bestimmt, bei dem der Drehwinkel der Schwinge DC zwischen den Totlagen den vorgeschriebenen Wert φ und der entsprechende Drehwinkel der Kurbel AB die vorgeschriebene Größe ψ besitzt. Schlägt man um D mit DC_a den Kreis, so schneidet dieser den Kreis c_i im entsprechenden Punkte C_i und ebenso schneidet der um A mit AB_a geschlagene Kreis den Kreis b_i im entsprechenden Punkte B_i. Dann müssen die Bedingungen erfüllt sein, daß $\measuredangle\, C_i D C_a = \varphi$, $\measuredangle\, B_i A B_a = \psi$, $B_i C_i = B_a C_a$ ist und daß die drei Punkte B_i, A, C_i in einer Geraden liegen, (Abb. 17). Wählt man einen der vier Punkte B_i, B_a, C_i, C_a willkürlich, so sind die drei anderen eindeutig bestimmt. Man geht aber am zweckmäßigsten von C_a oder B_a aus, weil man dabei günstige Schnittpunkte und infolgedessen eine bessere Genauigkeit erhält.

Ich will noch einige Bemerkungen über den hier benutzten Weg hinzufügen, auf dem ich die obigen Ergebnisse abgeleitet habe. Der Umstand, daß sich hier so überaus einfache geometrische Oerter ergeben, läßt vermuten, daß man auch unmittelbar auf geometrischem Wege zum gleichen Ziel gelangen kann. Das ist auch der Fall. Man kann rein geometrisch vorgehen und findet dann, daß der Punkt C_a die Eigenschaft hat, daß seine Verbindungslinien mit den Punkten A und (H) den gegebenen Winkel $^1/_2\,(\psi - \varphi)$ einschließen (Abb. 18). Da auch $\measuredangle\, A(R)(H) = {}^1/_2\,(\psi - \varphi)$ ist, so muß der geometrische Ort der Punkte C_a ein Kreis durch die Punkte A, (R), (H) sein. Da sich auch $\measuredangle\, N B_a A = {}^1/_2\,(\psi - \varphi)$ ergibt, so folgt hieraus, daß der geometrische Ort der Punkte B_a ein Kreis durch die Punkte $A\,(R)\,N$ ist. Ferner kann man einen analytischen Weg einschlagen, indem man inbezug auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Koordinaten der Punkte B_a, B_i, C_a, C_i einführt und die Beziehungen, die zwischen diesen Punkten

bestehen, analytisch formuliert. Durch eine verhältnismäßig umständliche Rechnung gelangt man dann auch zu den oben gefundenen Ergebnissen. Ich habe jedoch hier Hilfsmittel der synthetischen Geometrie benutzt, die scheinbar komplizierter sind als der geometrische bzw. der analytische Weg, die insbesondere aber den Vorteil bieten, daß sie die hier gestellte Aufgabe als Sonderfall in die allgemeinen Betrachtungen der Getriebesynthese einordnen.

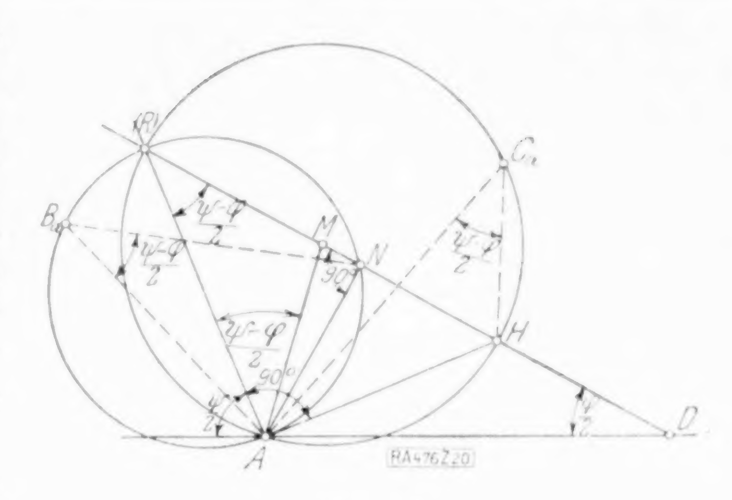


Abb. 18.

3. Zusatzbedingungen. Wir haben gesehen, daß die hier behandelte Aufgabe nicht völlig bestimmt ist, sondern nur auf gewisse geometrische Oerter führt. Infolgedessen kann man noch eine und zwar nur eine weitere Bedingung erfüllen, die ich hier die Zusatzbedingung nennen will. Die Art dieser Zusatzbedingung ist ganz beliebig und kann entsprechend den Verhältnissen, die bei der jeweils vorliegenden praktischen Anwendung auftreten, willkürlich gewählt werden. Hat man dann eine Zusatzbedingung gewählt, so findet man dadurch einen der Punkte B_a, B_i, C_a, C_i, wodurch dann auch die übrigen bestimmt sind. Wie man hier vorgeht, will ich an einem durchgeführten Beispiele zeigen, das für die praktischen Anwendungen von Wert ist.

Als Beispiel will ich die Zusatzbedingung behandeln, daß außer den beiden Totlagen noch je eine dritte Lage von Kurbel und Schwinge gegeben sei. Einer dritten Stellung der Schwinge DC, die mit deren äußerer Totlage den vorgeschriebenen Winkel φ' einschließen soll, möge eine dritte Stellung der Kurbel AB entsprechen, die gegen die äußere Totlagenstellung der Kurbel den gegebenen Winkel ψ' bilden soll (Abb. 19). Man kann hier den folgenden zeichnerischen Weg einschlagen, dessen Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist.

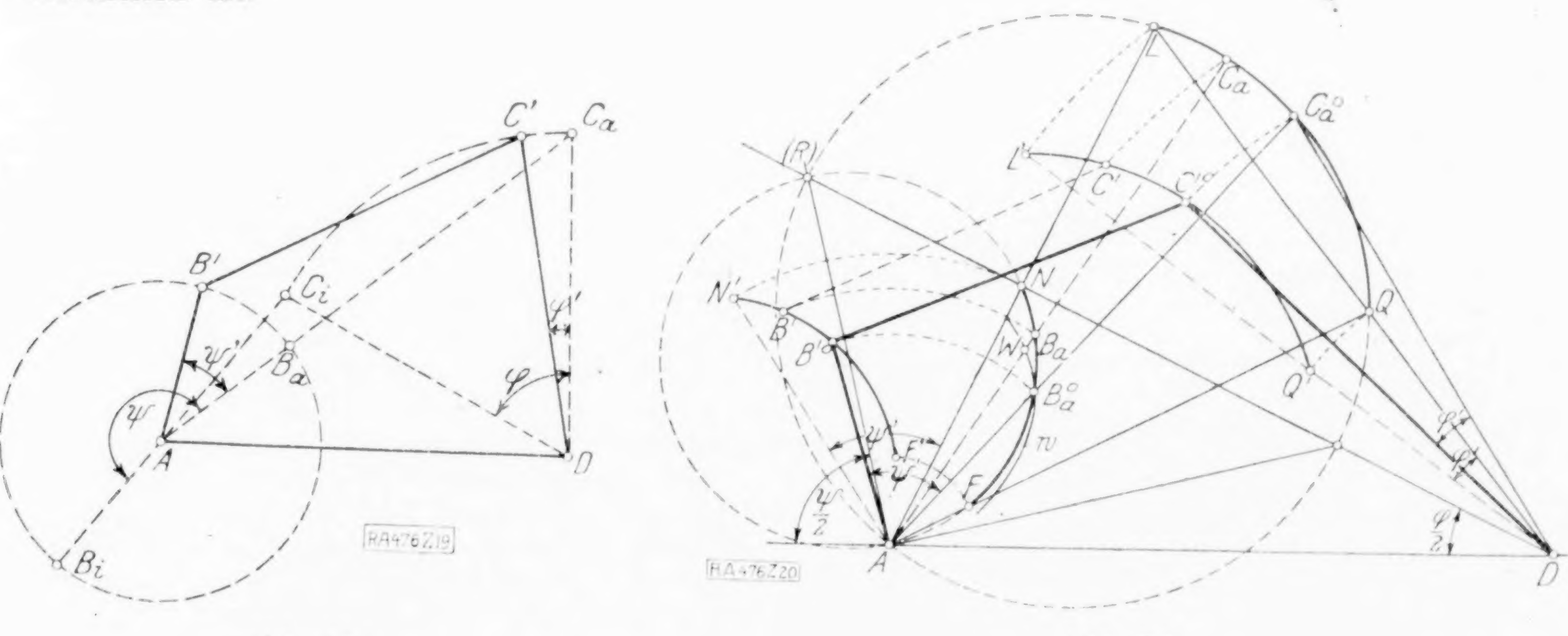


Abb. 19. Abb. 20.

Man zeichnet zunächst die beiden Kreise c_a und b_a und ermittelt auf ihnen die für die Lösung der Aufgabe brauchbaren Kreisbögen, in Abb. 20 die Bögen QL bzw. FN. Dann dreht man den Kreisbogen QL um D als Drehpunkt um den Winkel φ' in die Lage $Q'L'$ und den Kreisbogen FN um A als Drehpunkt um den Winkel ψ' in die Lage $F'N'$. Die Kreisbögen $Q'L'$ und $F'N'$ sind die geometrischen Oerter für die der dritten Lage entsprechenden Koppelgelenkpunkte C' bzw. B'. Auf dem Kreisbogen QL wählt man einen beliebigen Punkt C_a, die Gerade C_aA schneidet den Kreisbogen FN im zugeordneten Punkte B_a. Der um D mit DC_a geschlagene Kreis schneidet den Bogen $Q'L'$ in C' und der um A mit AB_a geschlagene Kreis schneidet den Bogen $F'N'$ in B'. Da der Punkt C_a auf dem Kreisbogen QL willkürlich gewählt wurde, wird im allgemeinen nicht die notwendige Bedingung erfüllt sein, daß $B'C' = B_aC_a$ ist. Wir tragen nun die Strecke $B'C'$ auf AC_a von C_a aus nach A hin ab und erhalten dadurch einen Punkt W.

Für jeden Punkt C_a des Kreisbogens QL finden wir einen solchen Punkt W, und diese Punkte W bilden eine Kurve w, die den Kreisbogen FN in demjenigen Punkte $B_a{}^0$ schneidet, der das gesuchte Gelenkviereck bestimmt. In der Regel genügt es, drei oder vier Punkte der Kurve w zu ermitteln. Die Gerade $AB_a{}^0$ schneidet den Kreisbogen QL im entsprechenden Punkte $C_a{}^0$ (Abb. 20). Wenn die Kurve w den Kreis b_a nicht auf dem Bogen FN schneidet, so existiert kein Gelenkviereck, das die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt.

Das eben behandelte Beispiel einer Zusatzbedingung ist in der Anwendung sehr vielseitig verwendbar. Man kann die Antriebskurbel AB als gleichförmig sich drehend und ihre Drehwinkel infolgedessen als der Zeit proportional annehmen. Wenn man daher ψ' verhältnismäßig klein, dagegen φ' verhältnismäßig groß wählt, so erreicht man, daß die Bewegung der Schwinge von C_i nach C' sehr langsam und von C' nach C_a schnell erfolgt. Man erkennt hieran, daß man durch geeignete Wahl der Winkel φ' und ψ' den Bewegungsverlauf der Schwinge sehr weitgehend beeinflussen kann.

Als weitere Zusatzbedingungen, die sich in ähnlicher Weise verwirklichen lassen, wie es bei dem eben behandelten Beispiele gezeigt wurde, will ich die folgenden nennen. Man kann fordern, daß die Winkelbeschleunigung der Schwinge in der inneren oder auch in der äußeren Totlage möglichst klein sein soll. Ferner kann verlangt werden, daß der Geschwindigkeitsverlauf des Punktes C bei seiner Bewegung von C_i nach C_a möglichst gleichmäßig sein soll. Diese Forderung würde sich in der Weise formulieren lassen, daß das Geschwindigkeitsmaximum des Punktes C bei der Bewegung von C_i nach C_a, deren Zeitdauer durch die Winkel φ und ψ schon festgelegt ist, möglichst klein sein soll. Es kann auch der Fall eintreten, daß ein vorhandenes Getriebe geändert werden und dabei nach Möglichkeit vorhandene Teile verwendet werden sollen. Hier kann man die Zusatzbedingung stellen, daß eine der drei Längen AB, BC, CD eine vorgeschriebene Größe haben soll. 476

Dresden, November 1924.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

H. Zimmermann berechnet neuerdings die **Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse.** (Eine Erweiterung der Eulerschen Knicktheorie. Berl. Ber. 1923, 262 bis 282, Nr. 25. — Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung. Berl. Ber. 1921, 277 bis 288, Nr. 26/27). Für einen geraden in seiner Längsrichtung durch eine Druckkraft beanspruchten Stab gibt bekanntlich die klassische Theorie, bei der im Ansatz der Differentialgleichung der elastischen Linie der erste Differentialquotient gegen Eins vernachlässigt wird, als kritische Werte die Eulerschen Knicklasten, für die man unbestimmte Ausbiegungen erhält. Diese Unklarheit verschwindet, wenn man, wie es bereits Grashof getan, die genaue Gleichung der elastischen Linie der Rechnung zugrunde legt. Unterhalb der Eulerlast gibt es nur das Gleichgewicht der gleichförmigen Zusammendrückung, oberhalb des kritischen Wertes gibt es außer diesem Gleichgewichtszustand noch einen mit Ausbiegung, der dann der stabilere ist. Es ist festzuhalten, daß der Verzweigungspunkt der Ausbiegung die Knicklast bedeutet und daß definitionsgemäß bei Beginn der Ausbiegung das Knicken eintritt. Rechnungsmäßig kann man allerdings bei Verwendung der vereinfachten Differentialgleichung das Unbestimmtwerden der Ausbiegung als Kriterium der Knicklast betrachten. — Ist eine Anfangsexzentrizität der Last vorhanden (oder ist der Stab von vornherein nicht gerade), so liegt ein Biegungsproblem vor, das mit der Stabilität nichts unmittelbar zu tun hat; es ist jetzt zunächst eine Spannungsaufgabe zu untersuchen. — In der eigenartigen Meinung, »daß keiner der vielen Forscher, die sich mit der Knicktheorie beschäftigt haben, auf den Gedanken gekommen ist, die Annahmen einmal gründlich zu prüfen«, hat nun H. Zimmermann (wie schon recht viele vor ihm) das Spannungsproblem mit dem Stabilitätsproblem verwechselt (1923, S. 280). In der ersten Abhandlung über die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse wird schließlich behauptet, daß man sich bei Knickversuchen nicht übermäßig mit der Herstellung möglichst gerader Stäbe bemühen und auf die achsrechte Einstellung der Kraft besondere Sorgfalt verwenden müsse. Das Ziel sei vielmehr, den richtigen Hebel zu finden, bei dem der Stab an die Knickgrenze gebracht werden kann. Die zweite Abhandlung ist eine Erwei-

terung der ersten, indem die Stabenden elastisch eingespannt sind. — Daß der so von Zimmermann aufgefundene »methodische Fehler« »im Laufe der 179 Jahre, die seit dem Erscheinen der Theorie Eulers verstrichen sind, nicht erkannt worden ist« (1923, S. 280), hat also, wie man sieht, seine guten Gründe gehabt.

Auf eine beachtenswerte Beziehung bei der **Biegungslinie gedrückter Stäbe** macht L. Kulka aufmerksam. (Zeichnerische Ermittlung der Biegungslinie gedrückter Stäbe auf Grund eines hydrostatischen Gleichnisses. Der Bauingenieur 1925, S. 116 bis 121 und S. 145 bis 149). Ein Stab aus homogenem Material (Elastizitätsmodul E) mit konstantem Querschnitt (Querschnittsträgheitsmoment J) ist an seinen Enden zentrisch gelenkig gelagert und durch die axiale Druckkraft P belastet. Bezieht man den Stab auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, dessen x-Achse mit der Verbindungslinie der Gelenke zusammenfällt und dessen y-Achse durch ein Auflagergelenk geht, so ist im Querschnitt x die Durchbiegung gleich y und die Fläche $\int_0^x y\,dx$ zwischen Biegungslinie und Stabsehne gleich F_x. Trägt man nun in einem Cartesischen Achsenkreuz die den einzelnen Punkten der Biegungslinie entsprechenden Werte $\frac{y^2}{2}$ und F_x auf, so erhält man einen Kreisbogen vom Radius $\frac{EJ}{P}$. Die geometrischen Tangenten in zusammengehörigen Punkten von Kreis- und Knicklinie stehen aufeinander senkrecht, die zur Knicklinie senkrechte Gerade, die durch den Schnittpunkt von zwei Tangenten geht, ist parallel zur Verbindungslinie der bezüglichen Kreispunkte. Man kann auch sagen: die Biegungslinie ist das Seilpolygon, das zum Kreis als Kräftepolygon gezeichnet wird. Kulka benützt diese Beziehung zur Darstellung einer zweiten Näherung der Biegungslinie, die erste Approximation erhält man aus dem vereinfachten Ansatz der Differentialgleichung der elastischen Linie. Das Verfahren wird dann auch auf den Fall der gleichzeitigen Wirkung von Längskraft und Querlasten ausgedehnt. — Es ist schließlich nicht ohne Interesse, daß die Knicklinie als Bodenkurve einer mit Wasser gefüllten zylindrischen Membran betrachtet werden kann, wobei der Kreisbogen die Wasserdrucklinie, d. h. das Kräftepolygon der Flüssigkeitsdrucke ist.

Ebene Fachwerke ohne Zweistabeck und räumliche Fachwerke ohne (räumliches) Dreistabeck werden bei Gleichzahl von Bedingungen und Unbekannten allgemein mit Hilfe des Stabtauschverfahrens berechnet, das in seiner ursprünglichen Form auf Henneberg zurückzuführen ist. Das Hilfsmittel der Stabvertauschung liefert auch ein Kriterium für das Tragverhalten von Fachwerken, deren statische Bestimmtheit zweifelhaft ist. Betrachten wir als Sonderfall des ebenen Fachwerks, das kein Zweistabeck besitzt, das Sechseck mit drei Diagonalen unter der Wirkung von in den sechs Knotenpunkten angreifenden miteinander im Gleichgewicht stehenden Kräften. Man berechnet mit der Methode des Tauschstabes eine Stabkraft, z. B. die einer Diagonale, sämtliche andern Stabkräfte können dann irgendwie rechnerisch oder graphisch bestimmt werden. Th. Pöschl zeigt, daß man die Stabkräfte eines ebenen Fachwerks ohne Zweistabeck auch rein zeichnerisch finden kann (Zur graphischen Statik zusammengesetzter Fachwerke. Der Bauingenieur 1924, S. 376 bis 378). Verwendet wird das sogenannte »gerade Kraftbüschel«. Es ist dies die Gesamtheit aller Kräfte durch einen Punkt der Ebene, die von diesem Punkt aus im Kräftemaßstab aufgetragen mit ihren Endpunkten eine gerade Linie, die »Grenzlinie«, bilden. Addiert man zu einem geraden Kraftbüschel geometrisch eine Kraft, so entsteht wieder ein gerades Büschel mit einer parallelen Grenzlinie. Sind von drei Kräften P, Q, R die Kräfte P, Q durch ihre Wirkungslinien (Schnittpunkt S), die Kraft R durch Lage und Größe gegeben und ist bekannt, daß die Summe der drei Kräfte durch einen Punkt O geht, so kann die (zu OS parallele) Grenzlinie für die Summe P, Q gefunden werden. Beim früher erwähnten Sechseck wird, wie die Untersuchung von zwei Trennungsschnitten durch je vier Stäbe mit den gleichen zwei Diagonalen zeigt, die Bestimmung der zwei Diagonalkräfte mit der Konstruktion von zwei Grenzlinien für ihre Summe geleistet. Pöschl zeichnet für dieses Beispiel einen zusammenhängenden Kräfteplan, in dem allerdings nicht jede Stabkraft nur einmal vorkommt.

Mit dem **Einfluß des Schwindens bei Betongewölben** beschäftigt sich E. Baticle. (Sur un mode de compensation du retrait dans les voûtes en béton. C. R. 177, 1006 bis 1008, 1923, Nr. 21. Mesnager. Observations au sujet de la Note de M. Baticle. C. R. 177, 1008 bis 1009, 1923, Nr. 21). Ein an seinen Kämpfern eingespannter Bogenträger erfährt beim Schwinden (oder bei einer Temperaturerniedrigung) an der Außenlaibung des Scheitels Druck-, an der Innenlaibung Zugspannungen, bei den Kämpfern an der Oberseite Zug-, an der Unterseite Druckspannungen. Baticle zeigt ein interessantes Verfahren, wie man das innere Gefüge eines Betonbogens verändern kann, damit die Wirkung des Schwindens ausgeglichen wird. Es geschieht dadurch, daß zwischen dem normalen Beton, der dem Schwinden unterworfen ist, keilförmige Elemente angeordnet werden, die vom Schwinden unabhängig sind. $\varkappa$ ist die Aenderung der Längeneinheit der neutralen Faser infolge des Schwindens (der Schwindungskoeffizient), γ ist

die hierbei entstehende Winkeländerung der beiden Querschnitte vom Abstand Eins (der Drehungskoeffizient). Für den dreifach stereostatisch unbestimmten symmetrischen Bogen werden für den Einfluß des Schwindens aus drei Elastizitätsgleichungen drei Ueberzählige und damit der Verlauf der Biegungsmomente ermittelt. Der senkrechte Abstand der Punkte der Bogenmittellinie von der Geraden, die durch die Schwerpunkte der Kämpferquerschnitte gelegt wird, ist y, die Pfeilhöhe des Bogens (y im Scheitel) ist f. Mit der Annahme $\gamma = m y + p$, wobei m und p Konstante sind und den Voraussetzungen: die Bogenform ist eine flache Parabel, die Bogenstärke e ist konstant und die Normalkraft wird bei der Bestimmung der Ueberzähligen vernachlässigt, ergibt sich das Biegungsmoment in jedem Querschnitt, für jeden Wert $\varkappa$ gleich Null, wenn

$$m = -\frac{45}{4}\frac{\varkappa_1}{f^2}, \qquad p = \frac{15}{2}\frac{\varkappa_1}{f}$$

gewählt werden. Es bedeuten $\varkappa_1 = \varkappa\left(1 - \frac{\lambda + \lambda'}{2}\right)$, λ die vom Schwinden unbeeinflußte Länge der Außenlaibung, λ' die der Innenlaibung für die Längeneinheit. Da der Drehungswinkel $\gamma = \frac{\lambda - \lambda'}{e}\varkappa$ ist, gilt somit als Bedingung für das Verschwinden der Biegungsmomente

$$\frac{\lambda - \lambda'}{e} = \left(-\frac{45}{4}\frac{y}{f^2} + \frac{15}{2f}\right)\frac{\varkappa_1}{\varkappa}.$$

Sind also bei einem bestimmten Bogen von den keilförmigen Elementen z. B. die kleinste Abmessung und die gegenseitigen Abstände bekannt, so lassen sich ihre Dimensionen berechnen. Grundlage der ganzen Ueberlegung ist, daß der Zwischenbeton gut an den Keilen haftet, da sonst keine gemeinsame Drehung möglich wäre. Haben die Keile einen viel höheren Elastizitätskoeffizienten als der normale Beton, so könnte man in analoger Weise einen Ausgleich der elastischen Verkürzung erhalten. — Mesnager ergänzt diese Betrachtungen, indem er bemerkt, daß man eine entsprechende Wirkung auch erzielt, wenn man bei armierten Bögen über dem Scheitel die innere Laibung und gegen die Kämpfer zu die äußere Laibung stärker bewehrt. Bei nicht armierten Bögen kann man an der Außen- und Innenseite in den beschriebenen Gebieten Beton verschiedener Qualität verwenden. Auch bei Metallbögen könnte zu ähnlichen Mitteln gegriffen werden.

Neue deutsche Eisenbetonbestimmungen liegen in einem Entwurf des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton vor und werden in nächster Zeit als amtliche Vorschrift Giltigkeit erlangen (vergl. auch B. Löser, Ueber die neuen deutschen Eisenbetonbestimmungen 1925. Der Bauingenieur 1925, S. 217 bis 223). Hier soll nur in Kürze darüber berichtet werden, welche Berechnungsmethoden der Verordnungsentwurf für einzelne Konstruktionsteile angibt. — Bei Stützen wird der Knickung in der Form Rechnung getragen, daß man entsprechend dem Schlankheitsverhältnis die zulässige Druckspannung abmindert. Die Biegungsmomente von kontinuierlichen Trägern werden so wie für auf Schneiden gelagerte Träger bestimmt, die Querkräfte und Stützendrücke hingegen (in Hinblick auf die Fiktion der Schneidenlagerung) der Einfachheit halber so, als ob nur frei aufliegende, an den Stützen gestoßene Balken vorhanden wären. Bei Plattenbalken ist das in Rechnung zu stellende Höchstmaß der mittragenden Breite durch Faustformeln festgelegt, dies ist jedoch wenig wichtig, da sich der praktische Konstrukteur hiernach kaum richten wird. Bei der Bestimmung der Ueberzähligen statisch unbestimmter Tragwerke ist es notwendig, die Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe zunächst anzunehmen, um damit in die Rechnung einzugehen. Wenn man, was bei Eisenbetonrahmen in der Regel ausreichend ist, nur den Einfluß der Biegungsmomente berücksichtigt und den der Normalkräfte außer acht läßt, kommt es nur auf das Verhältnis der Querschnittsträgheitsmomente der einzelnen Rahmenstäbe an. In Unkenntnis des wirklichen Verhaltens legt man auch bei einem Plattenbalken, bei dem zweifellos ein Teil der Platte mitwirkt, den aus Rippenbreite und Querschnittshöhe bestehenden Querschnitt der Rechnung zugrunde. (Die Armierung bleibt wegen dieser willkürlichen Annahme außer Betracht). Der Entwurf gibt nun für das einzusetzende Trägheitsmoment des Plattenbalkenquerschnitts (bei Stäben, bei denen nur ein Teil als Plattenbalken wirkt, also anscheinend nur für diesen Teil) den Ausdruck $(b + 6d)\frac{h^3}{36}$ an, b ist die Breite der Rippe unterhalb der Platte, d die Plattenstärke, h die Querschnittshöhe einschließlich Platte. Eine Begründung hierfür muß abgewartet werden. Auf jeden Fall kann nur ein Vergleich von Rechnungen mit sorgfältig ausgeführten Versuchen da Klarheit schaffen. Für Pilzdecken sind den amerikanischen Vorschriften nachgebildete einfache Formeln für die größten Biegungsmomente der Feld- und Gurtstreifen im Feld und längs der Stützenreihen angegeben. Schließlich möge noch erwähnt werden, daß die zulässigen Betondruckspannungen beträchtlich erhöht sind; als äußerster Wert ist für gewisse Konstruktionsorgane im Falle der Biegung eine Betondruckspannung von 70 kg/cm² im Entwurf als zulässig vorgesehen. Ratzersdorfer. 552

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur angewandten Kombinatorik. In der Kollektivmaßlehre wird zur numerischen Auswertung der höheren Streuungsmaßzahlen ein »Summenverfahren« verwendet, welches die aufeinanderfolgende Berechnung gewogener Potenzsummen ermöglicht. Als Gewichte dienen die Häufigkeitswerte der einzelnen Abweichungen und die Allgemeinheit der Methode besteht darin, daß über dieselben keine analytischen Voraussetzungen gemacht werden. Vom mathematischen Gesichtspunkt ist die Spezialisierung dieser Gewichtenreihe von Interesse; es ist bekannt, daß der einfachste Fall, in dem alle Gewichte gleich eins sind, zur Einführung der Bernoullischen Zahlen und Polynome hingeführt hat. Im folgenden wollen wir die spezielle Annahme

$$z_k = \binom{n}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

wählen, d. h. die Reihe

$$S_r = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} 2^r + \ldots + \binom{n}{n} n^r = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^r \quad (1)$$

betrachten. Falls r eine positive ganze Zahl ist, kann die allgemeine numerische Auswertung mit elementaren Hilfsmitteln erledigt werden. (Dieser Ansatz könnte dahin erweitert werden, daß man Potenzen von Produkten der Glieder arithmetischer Progressionen nimmt.)

Es handelt also von der Weiterbildung einer bekannten Formel aus der elementaren Kombinatorik ($r = 0$), die in der Literatur des Gegenstandes wenig Beachtung fand[1]). Dies ist um so auffallender, als die ihr nahe verwandte Formel (für $r \neq 0$):

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} 3^r + \ldots = \binom{n}{2} 2^r + \binom{n}{4} 4^r + \ldots \quad (2)$$

oft behandelt, in der Differenzenrechnung und in den statistischen Anwendungen oft verwertet wurde[2]).

Zur numerischen Auswertung von S_r bedienen wir uns eines Verfahrens, das dem bei der Ableitung von Gleichung (2) üblichen nachgebildet ist[3]). Man findet nämlich mit $S = (1 + t)^n$

$$S_0 = (S)_{t=1} - 1 = 2^n - 1,$$

$$S_1 = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=1} = (S')_{t=1} = \bar{S}' = n\, 2^{n-1},$$

$$S_2 = \left[\frac{d}{dt}(S' t)\right]_{t=1} = \bar{S}'' + \bar{S}' = (n^2 + n)\, 2^{n-2},$$

$$S_3 = \left[\frac{d}{dt}\left(t \frac{d}{dt}(S' t)\right)\right]_{t=1} = \left[\frac{d}{dt}(t^2 S'' + t S')\right]_{t=1}$$

$$= \bar{S}''' + 3\bar{S}'' + \bar{S}' = 2^{n-3}(n^3 + 3n^2),$$

$$S_4 = \left[\frac{d}{dt}(t^3 S''' + 3t^2 S'' + t S')\right]_{t=1}$$

$$= \bar{S}'''' + 6\bar{S}''' + 7\bar{S}'' + \bar{S}'$$

$$= 2^{n-4}(n^4 + 6n^3 + 3n^2 - 2n),$$

$$S_5 = \bar{S}''''' + 10\bar{S}'''' + 25\bar{S}''' + 15\bar{S}'' + \bar{S}'$$

$$= 2^{n-5}(n^5 + 10n^4 + 15n^3 - 10n^2)$$

und so fort.

Aus den Entwicklungen nach Potenzen von n ist folgendes zu ersehen: a) die Summe der Koeffizienten in der Klammer ist stets 2^{r-1}, b) wenn r eine von eins verschiedene ungerade Zahl ist, so ist S_r mit n^2 teilbar[4]). Diese Koeffizienten zeigen sonst keine einfach verfolgbare Bauart, so daß es für eine rekursive Betrachtung am zweckmäßigsten ist, an die voranstehende implizite Darstellung anzuknüpfen. Die Koeffizienten der impliziten Formen treten auch beim anfangs erwähnten »Summenverfahren« auf, da bis zu diesem Punkte die Spezialisierung der Gewichte nicht berücksichtigt wurde. In der Tat gelangt Lipps[5]), der diesen Prozeß zuerst ganz allgemein untersucht hat, auf ganz anderm Wege zu derselben Koeffiziententabelle.

Die Koeffiziententabelle lautet für unseren Fall und für $r \neq 0$:

i/r	0	1	2	3	4	5	6	....
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	6	7	1				
5	1	10	25	15	1			
6	1	15	65	90	31	1		
7	1	21	140	350	301	63	1	

[1]) Cairns bestimmt (Bull. of the American Math. Soc. XXVI. 4. 1920) das höchste Glied von $\sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n+k} k^r$, um die Momente des normalen Häufigkeitsintegrals mit einem Grenzübergang auszuwerten. — Allgemeine Potenzreihenkompositionen findet man in Pólya-Szegö-Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, Springer, 1925) S. 6.

[2]) S. Netto: Lehrbuch der Kombinatorik (Leipzig, Teubner, 1901) S. 249. — Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung (Berlin, Springer, 1924) S. 33. — Die speziellen Fälle $r = 1,2$ verwertet Czuber: Mathematische Bevölkerungstheorie (Leipzig, Teubner, 1923) S. 23; hierzu ist zu bemerken, daß in diesen einfachen Fällen der Ansatz $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ zur Ableitung ausreicht und das Differentiationsverfahren vermieden werden kann.

[3]) Für Gl. (2) setzt man $S = (1-t)^n$. — Die Fälle $r = 1, 2$ können auch hier elementar abgeleitet werden.

[4]) Am einfachsten erfolgt dies mit Verwendung der Symmetrieeigenschaft der Binomialkoeffizienten und mit Abtrennung derjenigen Glieder, welche direkt mit n^2 teilbar sind (es bleibt übrig: $n r S_{r-1}$, S_{r-1} mit n teilbar).

[5]) »Die Theorie der Kollektivgegenstände« (Wundt, Philosophische Studien XVII, Leipzig, Engelmann, 1902) S. 185.

Aus der obigen Bildungsweise ist ersichtlich — und mit Schluß von n auf $n+1$ beweisbar —, daß dieser Tabelle die folgende Rekursionsformel zugrunde liegt: Schreiben wir

$$S_r = \sum_{i=0}^{r-1} b_{r,i}\, \overline{S}^{(i)} \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

so ist:

$$b_{r,i} = (r-i)\, b_{r-1,i-1} + b_{r-1,i} \quad \ldots\ldots (4).$$

Das Gesetz der Koeffizienten ist[6]) mit $r - i = \mu$:

$$\left.\begin{aligned}(\mu-1)!\, b_{r,i} = \mu^{r-1} - \binom{\mu-1}{1}(\mu-1)^{r-1} + \\ + \binom{\mu-1}{2}(\mu-2)^{r-1} \mp \ldots \\ + (-1)^{\mu-1}\binom{\mu-1}{\mu-1} 1^{r-1}\end{aligned}\right\} (5).$$

Weiterhin ist

$$\overline{S}^{(i)} = \left(\frac{d^i S}{dt^i}\right)_{t=1} = n(n-1)\ldots(n-i+1)\, 2^{n-i} = \frac{i!\binom{n}{i} 2^n}{2^i},$$

so daß die Gleichung (3) die Gestalt erhält:

$$S_r = 2^n \sum_{i=0}^{r-1} 2^{-i}\, i! \binom{n}{i} b_{r,i} \quad \ldots\ldots (6).$$

Zur expliziten numerischen Berechnung von S_r dient die mitgeteilte Koeffizientenlabelle, verknüpft mit den folgenden — auch zu andern praktischen Zwecken oft verwendbaren — Bemerkungen:

Der Faktor

$$d_{n,i} = n(n-1)\ \ldots\ (n-i+1)$$

(d: Anzahl der Dispositionen oder Variationen) kann auf Grund einer einfachen Koeffiziententabelle nach Potenzen von n entwickelt werden[7]). Es ist:

$$\left.\begin{aligned}d_{n,i} = n^i - a_{i,1} n^{i-1} + a_{i,2}\, n^{i-2} \mp \ldots \\ + (-1)^{i-1} a_{i,i-1}\, n\end{aligned}\right\} (7),$$

wobei a) die Summe der Koeffizienten gleich Null ist (da $d_{n,i} = 0$ die Wurzel $n = 1$ besitzt), b) die Rekursionsformel besteht:

$$a_{i,\rho} = (-1)^{\rho}\left[a_{i-1,\rho} + (i-1)\, a_{i-1,\rho-1}\right] \quad (8)$$

(mit Schluß von n auf $n+1$ beweisbar). Die Koeffizientenlabelle ist in absoluten Werten:

ρ/i	0	1	2	3	4	5	....
1	1						
2	1	1					
3	1	3	2				
4	1	6	11	6			
5	1	10	35	50	24		
6	1	15	85	225	274	120	
⋮				⋮			

(Die $a_{i,\rho}$ sind die elementar symmetrischen Summen der Kombinationsprodukte der Wurzeln von $d_{n,i} = 0$, also der Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., $i-1$, so daß wir auch für dieselben ein einfaches numerisches Schema erhalten.)

Die explizite Darstellung von S nach Potenzen von n erfolgt im gegebenen Fall mit Anwendung der beiden hier mitgeteilten Koeffizientabellen am einfachsten. Zur Kontrolle der recht mühsamen Berechnungen verwendet man die obige Bemerkung über die Summe der Koeffizienten. — Aus der Bemerkung über die Teilbarkeit von S_r mit n^2 folgt für ungerade $r > 1$ die Beziehung:

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1} a_{r-i,r-i-1}\, b_{r,i}\, 2^i = 0 \quad . . (9).$$

Zum Schluß weisen wir kurz darauf hin, daß mit der symbolischen Bezeichnung

$$S_n{}^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^r$$

einfache Rekursionsformeln ableitbar sind, die aber zur numerischen Auswertung weniger geeignet sind. Nach Mitteilung des Herrn E. Sós ist z. B. symbolisch geschrieben:

$$S_n{}^r = n(1 + S_{n-1})^r \quad \ldots\ldots (10).$$

Budapest. Karl Goldziher. 511

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

H. **MARCUS**, Dr.-Ing., Direktor der Huta, Hoch- und Tiefbau-Aktiengesellschaft Breslau. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecker. Mit 123 Textabb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1921. IV + 368 S.

Die sinnreiche Methode, die Biegungsgleichung der elastischen Platte, d. i. eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung in zwei partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung zu zerfällen, wurde vom Verfasser im Jahrg. 1919 des »Armierten Betons« veröffentlicht und in ihrer Verwertung für Plattenberechnungen als die Theorie elastischer Gewebe bezeichnet. In dem größten Teil des vorliegenden Buches wird dies Verfahren, das den Vorteil einer anschaulichen Darstellung besitzt, an vielen Beispielen genauer dargelegt. In dieser Zeitschrift[1]) wurde die Marcussche Berechnungsweise bereits eingehend gewürdigt,

[6]) Ableitung s. bei Lipps a. a. O. S. 186.

[7]) Wir erinnern an die kompliziertere Entwicklung der betrachteten »Faktoriellen« als Bernoullisches Polynom, s. Nörlund a. a. O., S. 147.

[1]) In den Berichten von L. Föppl 1921, S. 466, und von H. Hencky 1922, S. 58.

so daß hier nicht nochmals darauf eingegangen werden soll. Neu ist in dem Buche die Berechnung der durchlaufenden Platten und der Pilzdecken (S. 201 bis 349). Da in der letzten Zeit die Verwendung der trägerlosen Decken im Eisenbetonbau überaus zugenommen hat und auch in den demnächst erscheinenden neuen amtlichen Vorschriften für die Ausführung von Bauwerken aus Eisenbeton Richtlinien für deren Berechnung enthalten sind, mag, wegen der praktischen Wichtigkeit, dieser Teil des Buches ausführlicher betrachtet werden.

Marcus untersucht zunächst mit Hilfe der Gewebetheorie die Decke mit neun quadratischen Feldern, die in einer Richtung unendlich ausgedehnte dreireihige Platte, dann die nach beiden Richtungen unendlich ausgedehnte Platte immer mit Punktlagerung, im letzten Fall auch approximativ mit einer Berücksichtigung des Biegungswiderstandes der Stützen. Diese Berechnungen bilden die Grundlage für eine Näherungsmethode, die ein einfaches praktisches Verfahren ermöglichen soll. Marcus führt sogen. stellvertretende Rahmen ein, das sind fiktive Rahmen in der Längs- und Querrichtung mit einer Querschnittsbreite des Riegels gleich der Feldweite und einer solchen fingierten Belastung, daß die Biegungsmomente den nach der Theorie bestimmten ungefähr entsprechen. Es ist festzuhalten (aus dem Buch geht dies nicht klar hervor), daß sowohl das unterschobene Rahmentragwerk als auch seine Belastung nur ideeller Natur sind und keine physikalische Bedeutung besitzen. (Die Untersuchungen auf S. 337 bis 343 beruhen also nur auf mehr oder weniger willkürlichen Annahmen). Die Belastung ist zum Beispiel für sämtliche Rahmen in der Längs- und Querrichtung fast doppelt so groß wie bei einem tatsächlichen Rahmensystem und wird auf einen Teil der Feldweite wirkend angenommen. Es steht hierbei nur eine gleichförmig verteilte Last in Frage. Wagrechte Unverrückbarkeit der Riegelstützpunkte wird vorausgesetzt, der Nullpunkt der Momentenlinien in den Stielen wird geschätzt. Nach Ansicht des Referenten ergeben sich die Biegungsmomente in den Mittelfeldern etwas zu groß. Durch eine andere Belastungslänge und eine andere gedachte Last könnte dies auch berichtigt werden; sorgfältige Erwägungen müßten, zeigen, ob eine Verbesserung jedoch für alle Felder und alle Belastungsarten noch zutreffend bleibt. Wenn aber schon näherungsweise gerechnet wird, warum nicht ganz einfach mit irgend einem ideellen »stellvertretenden« kontinuierlichen Träger? Approximativ könnte man dabei auch die Stützenbiegung berücksichtigen. Ratzersdorfer. 536

P. A. H. **LORENZ,** Schiffbau - Dipl. - Ing., Hamburg. Die Anwendung der Gleichung der drei Momente (Clapeyronschen Gleichung) im Schiffbau. Mit 78 Textabb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. 38 S.

Der kontinuierliche Träger ist so vielfach stereostatisch unbestimmt als Zwischenstützen vorhanden sind. Es war ein in prinzipieller Hinsicht sehr wichtiges Rechenverfahren, das gewöhnlich Clapeyron zugeschrieben wird, nicht die überzähligen Stützenreaktionen, sondern die Stützenmomente, also Abhängige der Stützkräfte als Unbekannte einzuführen. Hierdurch wurde eine einfache Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten gewonnen, die eine so elegante und bequeme Berechnungsweise des durchlaufenden Trägers ermöglicht, daß sie zum Gemeingut aller Ingenieure geworden ist. — In der vorliegenden Schrift werden diese seit etwa 70 Jahren bekannten Resultate als unklar hingestellt. Bezeichnungen wie »exoterische Form« und »esoterische Form« der Clapeyronschen Gleichung werden als notwendig erachtet, wobei hier der Unterschied in der Wahl des als positiv angenommenen Drehsinns der Biegungsmomente besteht! Ob der Schiffbau aus dieser Publikation Nutzen ziehen kann, muß stark bezweifelt werden. Ratzersdorfer. 542

L. **GEUSEN,** Dipl.-Ing. Prof., Dortmund. Die Eisenkonstruktionen. Ein Lehrbuch für Schule und Zeichentisch nebst einem Anhang mit Zahlentafeln zum Gebrauch beim Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 529 Abb. im Text und auf 2 farbigen Tafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VII + 310 S.

Innerhalb weniger Jahre erscheint das Buch von Geusen in vierter Auflage und das spricht wohl am besten für seine Beliebtheit. Der Umfang des Lehrbuchs überschreitet nur unwesentlich den der dritten Auflage (1921), die in dieser Zeitschrift ausführlich besprochen wurde[1]). Wie bisher ist der Stoff in drei Abschnitte unterteilt, die die Konstruktionsgrundlagen, die Hochbaukonstruktionen und die Brückenkonstruktionen behandeln. Im Abschnitt Eisenbahnbrücken sind die Vorschriften für Eisenbauwerke der deutschen Reichsbahn 1922 berücksichtigt. Die jetzt (1925) neu erschienenen Vorschriften für eiserne Eisenbahnbrücken konnten nicht mehr verarbeitet werden; sie unterscheiden sich aber nicht wesentlich von den früheren amtlichen Bestimmungen und außerdem ist der Hauptgegenstand des Buches, die konstruktive Gestaltung von Eisenkonstrukionen hiervon unbeeinflußt. Das schöne Buch wird sich zweifellos weiter Freunde erwerben.

Ratzersdorfer. 543

FRIEDRICH **BLEICH,** Dr.-Ing. Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 117 Abb. im Text. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. V + 220 S.

[1]) 1922, S. 157.

Ueber das Verfahren des Viermomentensatzes wurde in dieser Zeitschrift bereits genau berichtet[1]). Bei der Berechnung eines statisch unbestimmten Tragwerks werden hier außer den Ueberzähligen des Systems noch die Stabdrehwinkel (die Drehwinkel der Stabsehnen bei einer Formänderung) als Variable eingeführt. Diesem System von Unbekannten stehen gegenüber: die Viermomentengleichungen, das sind Gleichungen Clapeyronscher Bauart, die aussagen, daß es für jede steife Ecke (jeden steifen Knoten) nur einen Knotendrehwinkel gibt, und für jede geschlossene Figur die beiden Winkelgleichungen, die die Bedingung dafür sind, daß die Figur auch nach der Deformation geschlossen bleibt. Bleich hat in der zweiten Auflage nur einige unwesentliche Aenderungen vorgenommen, jedoch einige wertvolle Beispiele neu eingefügt. Hinzugekommen sind die Darstellung der Einflußlinien des Vierendeel-Parallelträgers und die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens. Wünschenswert wäre es gewesen, wenn Bleich die Stellung des Viermomentensatzes innerhalb der Theorie der statisch unbestimmten Systeme klargelegt hätte, schon damit der Leser erkennt, welche Aufgaben sich zweckmäßiger nach anderen Methoden erledigen lassen. Das interessante, leicht lesbare Buch kann dem praktischen Ingenieur bestens empfohlen werden. Ratzersdorfer. 544

PAUL **SCHRÖDER,** Die kritischen Zustände zweiter Art raschumlaufender Wellen. Von der techn. Hochschule zu Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation. 41 + III S. Preis 2,80 M. Zu beziehen durch die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin.

Der Verfasser gibt einleitend einen Ueberblick über den bisherigen Stand der Wissenschaft, der als Ergänzung zu den Grammelschen Ausführungen in »Ergebnisse in exakten Naturwissenschaften«, Springer, Berlin 1922, angesehen werden kann. Er behandelt das Problem dann analytisch und bekommt eine Bestätigung der kritischen Drehzahlen zweiter Art, die Stodola zuerst nachgewiesen hat. Die Stodolaschen Versuchsergebnisse stehen in guter Uebereinstimmung mit Schröders theoretischen Betrachtungen. Schröder verfolgt auch quantitativ das Anwachsen des Ausschlages bei den kritischen Schwingungen zweiter Art und findet so kleine Werte, daß die kritischen Zustände zweiter Art in den meisten praktischen Fällen keine Bedeutung haben. Er weist ferner nach, daß man für jede umlaufende Welle periodische Verdrehungsmomente angeben kann, die keine Drehzahlschwankung sondern nur Biegungsschwankungen zur Folge haben.

Die Arbeit wird in den Kreisen, die sich mit Fragen aus der technischen Schwingungslehre befassen, viel Interesse finden.

O. Föppl, Braunschweig. 521

[1]) 1921, S. 144, und siehe auch 1921, S. 416.

E. **LECHER,** Die Kultur der Gegenwart, herausgegeben von P. Hinneberg. 3. Teil, 3. Abt., 1. Bd. Physik. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 116 Abb. im Text. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1925. VIII + 849 S. Preis geh. 34 M, geb. 36 M, in Halbfranz 41 M.

Die Herausgeber eines Werkes, das weiteren Kreisen einen Ueberblick über unser Gesamtwissen in fachlich einwandfreier und verständlicher Form vermitteln soll, sind in erster Linie vor die Aufgabe gestellt, zwei wichtigen und nicht leicht in Einklang zu bringenden Forderungen zu genügen: Die eine, den Leser rein phänomenologisch in nicht ermüdender Weise über die wesentlichen derzeit festgestellten Tatsachen zu orientieren, die andere, ihm etwas von der auf wissenschaftliche Erkenntnis begründeten Weltanschauung zu vermitteln. Und dies letztere kann nicht geschehen, ohne die historischen Entwicklungsgänge darzustellen und auf die für jedes Wissensgebiet, jede Forscherpersönlichkeit und jedes Entwicklungsstadium charakteristische Forschungsmethodik, die Art des Auffindens und Verkettens von Gedanken und Tatsachen einzugehen. Um den beiden Gefahren eines allzu trocken-lexikographischen oder eines allzu feuilletonistischen Tones auszuweichen, kann man auf Vollständigkeit und Einheitlichkeit der Darstellung verzichten und dafür die bedeutendsten Forscher der Zeit, jeden in seiner Art, darstellen lassen, wie sie und ihre Vorgänger, Mitstrebende und Schüler die Erkenntnisse ihrer speziellen Arbeitsgebiete in ihren Zusammenhängen erfaßt, geformt und erweitert haben. So kommt sicher, mit den Augen großer Persönlichkeiten gesehen, ein lebendiges und anschauliches Kulturbild zustande.

Nach diesen Richtlinien hat E. Warburg 1914 die erste Auflage des Bandes »Physik« im Sammelwerk »Die Kultur der Gegenwart« redigiert. Ihm ist jetzt als Herausgeber der zweiten Auflage E. Lecher gefolgt, der die ursprünglichen Intentionen des Werkes beachtend, nur die einzelnen Artikel durch Zusätze über die Entwicklung des letzten Jahrzehnts ergänzen, sowie einige neue Beiträge über Quantentheorie und Atombau hinzufügen ließ.

Die Einteilung des Buches folgt der traditionellen in die fünf Kapitel: Mechanik, Akustik, Wärme, Elektrizität und Licht; ein sechster Abschnitt behandelt »Allgemeine Gesetze und Gesichtspunkte.«

Der Artikel über »Mechanik im Rahmen der allgemeinen Physik« von E. Wiechert muß sich naturgemäß darauf beschränken, den Sinn und die Entwicklung der Grundprinzipien auseinanderzusetzen. Sehr lebhaft präzisiert der Verfasser seine Stellung zur Aetherfrage und zur Relativitätstheorie. E. Auerbach stellt »historische Entwicklung und kulturelle Beziehungen« der Akustik dar. Unter den 10 Artikeln, die im Abschnitt »Wärmelehre« zusammengefaßt werden, sind die ersten sechs, von Mitgliedern der Physikalisch-technischen Reichsanstalt verfaßt, hauptsächlich Fragen

der messenden Physik gewidmet: E. Warburg berichtet über »Thermometrie«, L. Holborn über »Kalorimetrie«, W. Jaeger über »Wärmeleitung« usw. Die mechanischen Eigenschaften der Materie (Elastizität, innere Reibung usw.) behandelt hier Holborn im Zusammenhange mit den thermischen. Ueber die »Entwicklung der Thermodynamik«, dieses schwierige und gedanklich so fesselnde Gebiet referiert F. Henning leider nur auf knappen 11 Seiten. Den Schluß des Abschnittes bilden vier Aufsätze über Experimente und Theorien in der Strahlungslehre und Atomistik, alle vier von Meistern ihres Gebietes geschrieben; mag es auch vom modernen Standpunkt nicht ganz glücklich erscheinen, daß Strahlung und Atomistik noch immer der Wärmelehre eingegliedert werden, so sind die Aufsätze selbst doch so weitumfassend, tiefgehend und zugleich konzis, daß in ihnen ein großer Teil dessen, was wir heute als »Strukturlehre der Materie« zusammenfassen, enthalten ist. Ueber die Erforschung des gesamten elektromagnetischen Spektrums berichtet H. Rubens, natürlich unter besonders eingehender Berücksichtigung des Ultraroten. Die Bedeutung der experimentellen Ergebnisse für die Strahlungstheorie und die Molekularforschung werden fesselnd dargelegt. Der Artikel des verstorbenen Verfassers ist von seinem Schüler G. Hettner neubearbeitet worden. Den Strahlungsgesetzen, einschließlich der Grundgedanken der Quantentheorie und der Anwendung der Planckschen Beziehung auf andere physikalische Vorgänge (Lichtelektrizität usw.), ist der folgende Aufsatz des Münchener Physikers W. Wien gewidmet. Die experimentelle Atomistik, Gaskinetik, spezifische Wärme usw. behandelt der Bericht von E. Dorn, neubearbeitet von K. Przibram, für die Bearbeitung der theoretischen Atomistik, Gastheorie, Statistik usw. ist, als Begründer der Theorie der Brownschen Bewegung, Albert Einstein selbst gewonnen worden.

Im Abschnitt »Elektrizitätslehre« werden zunächst auch die schon mehr historischen und klassisch gewordenen Gebiete, Entwicklung der Elektrizitätslehre (F. Richarz), die Entdeckungen von Maxwell-Hertz (E. Lecher) behandelt. Die meisterhafte Darstellung der Elektronentheorie hat ihren Begründer H. A. Lorentz zum Verfasser. Ueber Magnetismus berichten als zuständige Autoren R. Gans und E. Gumlich, die Bearbeitung mehr elektrotechnischer Fragen ist den beiden Führenden dieses Faches, F. Braun und M. Wien, anvertraut worden. H. Starke leitet mit seinem Artikel über elektrisches Leitungsvermögen wieder in das Gebiet der Atomistik der Materie hinüber; mit der Korpuskularstrahlung beschäftigen sich W. Kaufmann (Kathodenstrahlen) und E. Gehrcke und O. Reichenheim (α-Strahlen), während ein kurzer Bericht über die für die Untersuchung der Materie so wichtig gewordenen Röntgenstrahlung wiederum aus der Feder W. Kaufmanns stammt. Der anschließende Artikel über Entdeckungsgeschichte und Grundtatsachen der Radioaktivität rührt von dem seither verstorbenen Forscherpaar J. Elster und H. Geitel her und ist in schöner Pietät, unter möglichster Wahrung der ursprünglichen Form, von St. Meyer und E. Schweidler neubearbeitet worden. Dieselben Verfasser berichten auch noch über die neuesten Ergebnisse auf dem Gebiete der »Radioaktiven Strahlungen und Umwandlungen«.

In der Optik behandelt O. Wiener die klassische Wellenlehre, der sehr interessante Artikel über »Neuere Fortschritte der geometrischen Optik« von dem jüngst verstorbenen Breslauer Physiker O. Lummer ist mit Zusätzen von M. v. Rohr versehen. Ueber Spektralanalyse, mit Berücksichtigung ihrer astronomischen Anwendungen, spricht ihr bewährter Experimentator F. Exner, über Struktur der Spektrallinien E. Gehrcke. P. Zeemann, der Entdecker des nach ihm benannten Effektes, der Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfelde, stellt uns in seinem schönen Bericht »Magnetooptik« eine Reihe von wunderbaren Tatsachen vor Augen, deren Erklärung wieder eindringlich die Annahme der quantenhaften Struktur der Materie fordert. Ueber Quantentheorie, Atombau und Spektrallinien, jenen Zweig der Physik, der erst im letzten Dezennium durch die Forschungen von Niels Bohr seinen Anfang und schnellen Aufschwung erlebte, berichtet unübertrefflich klar und fesselnd einer der führenden jungen Theoretiker, der Kopenhagener H. A. Kramers.

Findet schon in all den erwähnten, mehr speziellen Abschnitten der Laie reiche Belehrung, der Fachmann, neben der Freude an den konzisen Zusammenfassungen, mannigfache Anregung durch die Art, wie die Tatsachen von den verschiedensten Gesichtspunkten beleuchtet und miteinander verknüpft werden, so ist doch vielleicht, mit Rücksicht auf den eingangs skizzierten Zweck des Werkes, dessen letzter Abschnitt »Allgemeine Gesetze und Gesichtspunkte« als sein wertvollster Bestandteil anzusehen. Diese sechs Aufsätze über die grundlegenden Fragen sind in den Händen der dazu Berufensten zu kleinen abgeschlossenen Meisterwerken gestaltet worden. Das für das große Publikum so abschreckend langweilige Gebiet der Präzisionsmessungen beleuchtet E. Warburg in seiner Bedeutung für die allgemeinen Ziele der Physik. Ueber Energie und Entropieprinzig handelt der Artikel von F. Hasenöhrl, ergänzt von H. Mache. Die Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung und seine Erfolge in der klassischen Mechanik, Thermodynamik und Elektrodynamik, sowie schließlich in der Elektronentheorie und Relativitätstheorie finden ihre Interpretation in M. Plancks vollendeter Darstellung, gleicherweise wie die Relativitätstheorie in der von A. Einstein. W. Voigt schildert in fesselnder Art den Charakter und die Verwen-

dung phänomenologischer und atomistischer Betrachtungsweise. M. Planck aber setzt dem Werke den Schlußstein mit seiner tiefgründigen Abhandlung: »Verhältnis der Theorien zueinander.«

Wenn der Leser in einem Buche so viel Erweiterung seines positiven Wissens, soviel Anregung, Freude und Genuß findet wie in dem besprochenen, so muß nicht nur der Herausgeber und Autoren, sondern auch der Initiative des Verlegers mit Anerkennung gedacht werden. Der Verlag Teubner erwirbt sich mit dem monumentalen Sammelwerke »Die Kultur der Gegenwart« Verdienste um die Zusammenfassung und Verbreitung unseres Gesamtwissens, die der ehrenvollen Tradition dieses Hauses vollauf entsprechen.

Laski. 551

ARTHUR **HAAS**, Dr. Phil. a. o. Professor an der Universität Wien. Atomtheorie in elementarer Darstellung. Mit 56 Figuren im Text und auf zwei Tafeln. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1924. VIII + 201 S. Preis geh. 5,40 M, geb. 6,80 M.

In die Zahl der leicht lesbaren, auch dem Anfänger verständlichen Einführungen in die moderne Atomtheorie reiht sich würdig das neue Buch von A. E. Haas. In sehr klarer und übersichtlicher Darstellung werden die experimentellen und theoretischen Grundlagen der Strukturforschung, insbesondere die Theorie des Wasserstoffatoms, der Röntgenstrahlen, die Theorie der Elemente (Isotopie, radioaktive Zertrümmerung, Kernstruktur usw.), schließlich die allgemeine Theorie der Spektren und des Atombaus behandelt. Das Büchlein ist für seine knappe Seitenzahl äußerst reichhaltig, das große Figurenmaterial unterstützt die Anschaulichkeit. Erwähnt sei, daß in einem Anhang der Inhalt des ganzen Buches, nach seinen Kapiteln geordnet, in kurzen, prägnanten Absätzen zusammengefaßt ist, so daß es dem Leser sehr erleichtert wird, bei der Lektüre den Faden nicht zu verlieren und das Wesentliche im Gedächtnis zu behalten; zur leichteren Orientierung dient auch eine Uebersicht über die häufigsten Bezeichnungen und über die universellen Konstanten der Atomphysik. Wer sich also — man darf bei dem schnellen Fluß der Anschauungen nicht sagen über den heutigen —, sagen wir, über den Stand der Atomtheorie, wie er vor einem halben Jahre war, unterrichten will, dem sei das Werkchen empfohlen.

G. Laski. 503

Dr. E. **CZUBER**, o. ö. Professor an der technischen Hochschule in Wien. Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wissenschaft und Hypothese. Bd. XXIV. Leipzig und Berlin 1923, Verlag von B. G. Teubner. VIII + 343 S. Grundzahl 10 M.

Dies Buch des großen Meisters der Wahrscheinlichkeitstheorie hatte ein tragisches Geschick. Im wesentlichen bereits 1917 beendet, konnte es infolge der bekannten wirtschaftlichen Schwierigkeiten erst 1922 erscheinen. Es ist also zu früh geschrieben und zu spät erschienen, bereits bei seinem Erscheinen in den meisten Punkten überholt. So bleibt es im wesentlichen in der Betrachtung zweier älterer Werke stecken, von denen das eine längst widerlegt (Marbe, »Gleichförmigkeit in der Welt«), das andere unlesbar ist (Meinong, »Ueber Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit«). Das groß angelegte Buch von Keynes ist leider nicht berücksichtigt.

Das erste Kapitel handelt von Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit und folgt im wesentlichen dem gleichnamigen Buch von Meinong. Hier werden die eigentlichen Grundbegriffe subtil philosophisch analysiert. Doch stimmt der Verf. Meinong nicht überall bei, und er sagt deutlich, daß manches bei Meinong dem Mathematiker unverständlich bleiben muß. Die Schwierigkeiten der Definition des Begriffes der Wahrscheinlichkeit, die meistens einen circulus vitiosus enthalten, werden eingehend erörtert. Ebenso der Begriff der Gleichmöglichkeit, der von manchen Philosophen abgelehnt wird, da die Möglichkeit nichts Quantitatives an sich habe. Bei der Frage, ob die Wahrscheinlichkeit objektiv oder subjektiv aufzufassen sei, nimmt der Verf. mit Meinong eine Art Mittelstellung ein. Am interessantesten ist zweifellos das Kapitel über Kausalität und Zufall. Die Erfahrung kann uns niemals zur Gewißheit führen, sondern nur zu einem speziellen Kausalurteil, also zur Vermutung. Das Kausalgesetz selbst aber ist eine Denknotwendigkeit, eine a priorische Erkenntnis. Diese kausale Betrachtungsweise steht der konditionellen entgegen, welche die Bevorzugung des einen »Ursache« genannten Faktors als unberechtigt bestreitet, wie dies unter anderm auch Marbe tut. Czuber tritt für die Kausalbetrachtung ein, allerdings soll das Begriffspaar »Ursache — Wirkung« durch das eindeutig einander zugeordnete Paar »Umstände — Geschehen« ersetzt werden, wobei die Elemente des Geschehens bei der wissenschaftlichen Erforschung in eine funktionelle Abhängigkeit gebracht werden. Das Paar »Bedingung — Geschehen« aber entspricht nicht der Wirklichkeit. Ein Ereignis wird als zufällig betrachtet, wenn wir sein Eintreffen oder Nichteintreffen nicht mit Gewißheit voraussagen können, oder sein Eingetroffensein oder Nichteingetroffensein nicht mit Sicherheit behaupten können. Entsprechend dem Zeitpunkt der Abfassung der Schrift fehlt natürlich die von v. Mises postulierte Zurückführung der Wahrscheinlichkeit auf den Begriff des Kollektivs und sein Versuch, so die Betrachtung des »Zufalls« im hergebrachten Sinne auszuschalten. Zweifellos wird aber die künftige Forschung an diesen Zusammenhängen weiterzuarbeiten haben.

Wichtig ist auch das Kapitel über Induktion. Der Naturforscher wird sie unbedingt bejahen, der Erkenntnistheoretiker wird ihr

nur eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuschreiben, die mit der Zahl der Fälle wächst. Zur Erforschung der Kausalität kann die Wahrscheinlichkeitstheorie unmittelbar nicht beitragen. Sie kann bei einem Ereignis nachweisen, daß seine Notwendigkeit an Wahrscheinlichkeit gewinnt und daß die Annahme, es handle sich um einen Zufall, immer unwahrscheinlicher wird. Aber das Gesetz der großen Zahlen berechtigt den Induktionsschluß nicht. Die Induktion muß vielmehr als ein selbständiges Prinzip hingenommen werden.

Das letzte Kapitel »Wahrscheinlichkeitstheorie und Naturphilosophie« betitelt, setzt sich eingehend mit Marbe auseinander, und erklärt sehr mit Recht die Marbesche Theorie der relativen Häufigkeiten für grundsätzlich verfehlt. An Hand von Beispielen, bei denen von Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinne nicht gesprochen werden kann, hat Marbe den praktischen Wert der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestreiten versucht. An ihre Stelle setzt er die Lehre von der Gleichförmigkeit und vom statistischen Ausgleich, die er durch Betrachtung der Iterationen zu beweisen versucht. Bortkiewicz und Mises[1]) haben aber gezeigt, daß das Verhalten der Iterationen in dem von Marbe herangezogenen Beispiel der Geburten durchaus mit den Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie übereinstimmt, falls man richtig rechnet. Als Konsequenz seiner Auffassung muß natürlich Marbe zu der Möglichkeit eines Spielsystems gelangen, mit Hilfe dessen man beim Roulette gewinnen muß. Czuber befürchtet, daß der Spieler diesen sicheren Gewinn mit dem sicheren Verlust des Verstandes zu bezahlen haben wird. Tatsächlich hat sich auch noch niemand gefunden, der nach Marbes System die Bank von Monte Carlo zu sprengen versuchte.

Meines Erachtens ist Marbe und Meinong ein zu großer Platz eingeräumt worden. Dadurch tritt manches neuere Problem vollkommen zurück, das sehr wohl eingehende Betrachtung verdient hätte. Der Begriff der Korrelation ist z. B. überhaupt nicht erwähnt, und die auch vom philosophischen Standpunkt so wichtige neuere statistisch orientierte Physik ist nur kurz gestreift. Gerade mit dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie aber sind zahlreiche philosophische Probleme verknüpft, wie sie etwa in dem Wiederkehreinwand und in dem Umkehreinwand repräsentiert sind. In seinen Zusätzen zur neuesten Auflage seines Lehrbuches der Wahrscheinlichkeitstheorie ist Czuber auf diese neuere Literatur (Keynes, Bortkiewicz, Mises) kurz eingegangen, und hierauf wird jeder Leser des vorliegenden Buches zurückzugreifen haben.

E. J. Gumbel. 448

CONRAD MATSCHOSS, Männer der Technik. Ein biographisches Handbuch, herausgegeben im Auftrage des Vereines deutscher Ingenieure. Mit 106 Bildnissen. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1925. XI + 306 S. Preis 28 M.

[1]) Diese Zeitschrift, Bd. 1, 1921, S. 298 bis 307.

Mit Recht bemerkt der Herausgeber im Vorwort, daß den um die Technik verdienten Männern weder Mitwelt noch Nachwelt Kränze zu winden gewohnt ist. Es ist daher ein sehr erfreuliches und dankenswertes Werk, das hier im Auftrage des V. d. I. geleistet wurde. Unter Leitung von C. Matschoß ist von etwa 50 Einzelverfassern ein biographisches Handbuch, das den Pionieren der Technik und der Naturwissenschaften — unter Ausschluß der noch Lebenden — gewidmet ist, geschaffen worden. Die Sorgfalt und Gründlichkeit der historischen Arbeiten von Matschoß ist seit langem bekannt und sie ist auch in dem vorliegenden Buche wieder zu finden. Die vielen Hunderte von Biographien, die in dem Bande vereinigt sind, bilden Muster an Zuverlässigkeit und Präzision. Darüber hinaus zeigen die meisten unter ihnen verständnisvolles Eingehen auf das Wesen der behandelten Persönlichkeit und erfreuen durch einen wohlwollenden, von jeder Kleinlichkeit freien Ton der Darstellung. Auch bei Gestalten, deren Bedeutung noch umstritten ist, hat der Biograph eine zugleich objektive und einfühlende Haltung einzunehmen gewußt. Bei jedem einzelnen Artikel sind die benutzten Quellen und der Name des Verfassers angegeben. In der Zusammenstellung der Mitarbeiter aus verschiedenen Fachgebieten und verschiedenen Gegenden des Reiches hat der Herausgeber großes Geschick bewiesen.

Die Auswahl der behandelten Personen weist, wie dies bei dem ersten derartigen Versuch wohl verständlich ist, manche Lücke auf. Daß Euler und Gauß, Monge und Poncelet unter den Männern der Technik aufgeführt werden, wird man gewiß billigen, aber warum fehlt Cauchy, der als Mathematiker den Genannten nicht nachsteht, der überdies Ingenieur war und die Elastizitätstheorie der Ingenieure begründet hat? Ebenso vermißt man Saint-Venant, ingénieur en chef des ponts et chaussées, dessen Name dem wissenschaftlich gebildeten Ingenieur geläufig ist. Aus unseren Tagen würde nach dem sonst angewandten Maßstabe u. a. vielleicht auch A. Auer Aufnahme verdienen, der Begründer der vorbildlich gewordenen Staatsdruckerei in Wien, Erfinder des sogenannten Naturdruck-Verfahrens, Mitglied der Wiener Akademie der Wissenschaften; dann Oberbaurat Gölsdorf, der Schöpfer vieler neuzeitlicher Lokomotivbauarten und mancher andere. Es ist sicher, daß sich die Zahl der noch Aufzunehmenden bedeutend erweitern läßt, doch ebenso sicher, daß Vollständigkeit zu erzielen, namentlich beim ersten Versuch, eine Unmöglichkeit wäre. Die vorstehenden Bemerkungen wollen auch nicht als Ausstellungen aufgefaßt werden, sondern als Anregungen für eine spätere Ausgestaltung. Wir wollen hoffen, daß der V. d. I. dem Buche, dessen Entstehung er gefördert hat, so großen Absatz verschaffen wird, daß recht bald eine erweiterte Auflage erscheinen kann. Dann wird sich vielleicht auch Gelegenheit ergeben, die in Strichzeichnung eigens für diesen Zweck von C. Turner ausgeführ-

ten Bildnisse, die nicht immer geschmackvoll wirken, durch eine andere Art der bildlichen Darstellung zu ersetzen. Mises. 546

A. **BERLINER** und K. **SCHEEL,** Physikalisches Handwörterbuch. Verlag von Julius Springer, Berlin 1921. 903 S. Mit 573 Textfiguren. Preis 39 M.

Ein äußerst verdienstvolles Unternehmen stellt das von Berliner und Scheel herausgegebene Handwörterbuch der Physik dar. In einem einzigen Bande von nicht allzu unhandlichem Format werden nach Schlagworten alphabetisch geordnet alle Hauptbegriffe der theoretischen und experimentellen Physik erklärt. Die einzelnen, durch zahlreiche Abbildungen ergänzten Artikel, die fast alle von einer Auslese der sachkundigsten Bearbeiter herrühren, sind klar und zweckentsprechend abgefaßt. Die uns am nächsten stehende Mechanik haben Philipp Frank-Prag, R. Grammel-Stuttgart und F. Noether-Breslau behandelt, denen sich noch Hopf-Aachen für Hydraulik, Cranz-Berlin für Ballistik, Martienssen-Kiel für Aeromechanik, Zerkowitz-München für Thermodynamik anschließen. Wie weitherzig die Abgrenzung des Stoffes nach der Richtung der technischen Anwendungen ist, mögen etwa die folgenden Schlagworte, die ausführlich behandelt sind, kennzeichnen: Dampfturbine, Dampfdruckdiagramm, Dampfkessel, elektrischer Transformator, Kreiselkompaß usf. Nach der theoretischen Seite hin bestimmen vielleicht die von Reichenbach gegebenen Erklärungen der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Grenze.

Wenn man an dem Werke, das als Ganzes außerordentlich befriedigt, eine Ausstellung machen darf, so wäre es die, daß die Auswahl der im Alphabet aufgeführten Schlagworte etwas knapp ist. Ohne viel Mühe und Platz-Inanspruchnahme könnten zahlreiche Schlagworte mit Rückverweisung auf andere Artikel aufgenommen werden, was die Benutzung des Buches ganz wesentlich erleichtern würde. So wie es jetzt ist, sucht man oft lange vergeblich und muß die Phantasie etwas anstrengen, um gerade das Bezugswort zu finden, das die Herausgeber für den Gegenstand gewählt haben. Auch daß manchmal zwei Artikel unter der gleichen Ueberschrift ohne gegenseitige Verweisung aufeinander folgen (z. B. »Lichtbrechung«) stört die Benutzung.

Die Ausstattung, die der Verlag dem Buche gegeben hat, ist ganz vortrefflich und läßt den Preis von 39 M für den in Halbleder gebundenen Band recht mäßig erscheinen. Hoffentlich wird bald Gelegenheit zu einer neuen Auflage sein, die gewiß alle bei einem solchen Werk unvermeidlichen Anfangsmängel beseitigen wird. Mises. 532

R. **COURANT,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und D. **HILBERT,** Geh. Reg.-Rat, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Methoden der mathematischen Physik. Erster Band. Mit 29 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band XII. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. XIII + 450 S.

An diesem wunderschönen Buche ist nur eines auszusetzen, nämlich, daß sein Titel nicht zum Inhalt paßt. Es müßte etwa heißen: Allgemeine Theorie der harmonischen Schwingungen. In der Tat sind diesem wichtigen und interessanten Gebiet der Mechanik und Physik von den sieben Kapiteln des Buches die drei letzten ausschließlich gewidmet, während die ersten vier die mathematische Einleitung hierzu auf breitester Basis bilden. Selbst die Dämpfung von Schwingungen kommt nur in zwei ganz kurzen Hinweisen zur Sprache.

Im einzelnen werden zunächst die für das Schwingungsproblem grundlegenden Sätze über lineare Gleichungen und quadratische Formen gebracht, wobei besondere Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt werden. Hierauf wird das Problem der Entwicklung in Fouriersche Reihen und ähnliche Funktionen-Reihen nach modernen Gesichtspunkten behandelt. Es folgt ein Abriß der Theorie der Integralgleichungen und der Variationsrechnung. Alle diese Kapitel sind trotz des abstrakten Stoffes mit großer Anschaulichkeit und Lebendigkeit, in flüssiger leicht lesbarer Darstellung geschrieben. Die dem Schwingungsproblem selbst gewidmeten Abschnitte gehen wohl für den Geschmack des angewandten Mathematikers etwas zu wenig auf die tatsächliche Berechnung einzelner konkreter Probleme ein. Doch muß man auch hier die außerordentliche Uebersichtlichkeit und Eleganz der Darstellung anerkennen, die großenteils den von Courant selbst gefundenen Fortschritten der Theorie zu verdanken ist[1]).

Man wird das Buch jedem empfehlen dürfen, der sich für die allgemeinen Fragen der Theorie harmonischer Schwingungen, namentlich für ihren tieferen Zusammenhang mit Problemstellungen der modernen Mathematik, interessiert; er wird es mit Genuß lesen und sicherlich viel Nutzen daraus ziehen.

Mises. 535

WILH. **WAGENBLAST,** Dr.-Ing. Wirkungen von Resonanzschwingungen in der Auspuffleitung von Vakuumpumpen. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1921. Heft 239. 45 S.

Angeregt durch die Schwierigkeit einer genauen Aufstellung des Kraftbedarfes von pneumatischen Massengutförderungen, der rund das 6 bis 8-fache des Bedarfes von Elevatoren oder Förderbändern beträgt, stellt sich der Ver-

[1]) Vergl. auch den Aufsatz von R. Courant, diese Zeitschr., Bd. 2 (1922), S. 278 bis 285.

fasser die Aufgabe, die Vorgänge in einer solchen pneumatischen Anlage genauer zu untersuchen, als es bisher üblich war. Als eine Quelle für die auftretenden Verluste erkennt der Verfasser Störungen in der Rohrleitung selbst, die als Folge von Schwingungs- bezw. Resonanzerscheinungen auftreten, so daß es für pneumatische Förderanlagen vor allem auf die richtige Wahl der Leitungslänge und der Luftgeschwindigkeit ankommt. Der Verfasser stellt sich demgemäß die Aufgabe, aus den geometrischen Abmessungen der Auspuffleitungen direkt die kritischen Drehzahlen der Antriebsmaschine auf Grund der Theorie von Sommerfeld-Debye (siehe Forschungsarbeiten Heft 106) zu bestimmen, die nur für die Ermittlung des Druckverlaufes bei Vakuumpumpen hinsichtlich der Grenzbedingungen entsprechend abgeändert werden muß. Die theoretischen Ergebnisse wurden durch Versuche an einer Saugluftversuchsanlage der Maschinenfabrik G. Luther A.-G. nachgeprüft und gut bestätigt. Zur Beobachtung des Einflusses der dynamischen Wirkungen auf den Spannungsverlauf im Zylinder und zur Feststellung der indizierten Leistungen dienten Kolbenwegindikatoren von J. Maihak-Hamburg und Zeitindikatoren nach Professor Wagener. Bei den Versuchen wurde zur Reinhaltung der Auspuffleitungen die Pumpenleistung durch Drosseln der Saugleitung vernichtet.

Die Theorie geht aus von der Gleichung der eindimensionalen Schwingungen einer Luftsäule, wobei die Sommerfeldschen Ansätze auch insofern weitergeführt wurden, als statt des sinusförmigen Druckverlaufes im Ventilraum über den ganzen Kolbenweg der Pumpe, der bei Sommerfeld zugrunde gelegt wird (was aber nur für die Saugseite zulässig ist), hier für die Druckseite die Ordinaten erst nach der Ventilöffnung sinusförmig vorausgesetzt, vorher aber null gesetzt werden. Die Druckunterschiede infolge der auftretenden Resonanzschwingungen zwischen der Drehzahl der Maschine und der Eigenschwingung der Luftsäule lassen sich durch die Indikatoren gut beobachten. Die dabei auftretenden Aenderungen des Kraftbedarfes zeigen sich sehr deutlich am Schlagen der Antriebsriemen und an der Unruhe der elektrischen Meßinstrumente.

Die zahlreichen beigegebenen Schaubilder für verschiedene Rohrlängen und Drehzahlen zeigen eine gute Uebereinstimmung mit der Theorie. Rohrkrümmungen haben auf die Ausbildung der Resonanz keinen Einfluß. Eine Aenderung des Vakuums hat wegen der veränderten Schallgeschwindigkeit nur eine Verschiebung der kritischen Drehzahlen zur Folge.

Was den Kraftbedarf anlangt, so ergeben die Versuche bei Resonanz unter ungünstigen Verhältnissen eine Steigerung bis zu 40 vH. Zur Vermeidung der damit verbundenen Uebelstände wird eine Umgehung der kritischen Gebiete vorgeschlagen, die für verschiedene Drehzahlen und Rohrlängen aus einem besonderen Bilde entnommen werden können.

Prag. T. Pöschl. 533

MAX **MÖLLER,** Dr.-Ing. e. h. ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, Geh. Hofrat. Kraftarten und Bewegungsformen. Die äußeren Bewegungen mit einführender Aufgaben-Sammlung. Mit 72 Abb. Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig 1922. VIII + 148 S.

Nach dem Titel wird mancher vermuten, daß es sich um eine Klassifikation der Kraftarten und Bewegungsformen auf Grund irgend welcher Ordnungsprinzipe handelt, die an die Spitze der Betrachtung gestellt werden. Indessen ist das Buch nichts anderes als eine sehr elementare Mechanik mit einer Reihe einfachster Beispiele; es enthält Betrachtungen über die einfachsten Fälle der Punktmechanik und Abschnitte aus der Mechanik der Kontinua und insbesondere aus der Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten, die auf das eigentliche Fachgebiet des Verfassers hinweisen, in diesen Zusammenhängen aber oft nicht recht recht verständlich sind. Was an Kassifikation geboten wird, muß der Referent als unzureichend bezeichnen, so die auf Seite 16 gegebene Zusammenstellung der Hauptarten der Bewegungsvorgänge und Kräfte, deren eigentlicher Sinn trotz der angeschlossenen Beispiele verborgen bleibt. Wenig befriedigend für den Leser sind auch die häufigen Verweise auf geplante oder anderwärts gegebene Untersuchungen, deren Zusammenhang mit dem dargebotenen Stoffe meist nicht recht einleuchtet, sowie das Vorwalten gefühlsmäßiger Betrachtungen, die bei exakteren, wenn auch elementaren Darstellungen aus dem Gebiete der Mechanik und Physik entbehrlich sein sollten.

Der Referent möchte dieses Buch als kennzeichnend für den Standpunkt und für die Arbeitsweise der sogenannten »Praktiker« bezeichnen, die nach Erkenntnis und Klarheit streben, die sich aber aus irgendwelchen Gründen eine sie selbst befriedigende und dabei einwandfreie Grundlegung ihres Wissens nicht haben schaffen können.

Prag. T. Pöschl. 534

F. **WITTENBAUER,** Aufgaben aus der Technischen Mechanik. I. Band Allgemeiner Teil 839 Aufgaben nebst Lösungen. Fünfte, verbesserte Auflage, bearbeitet von Dr.-Ing. THEODOR **PÖSCHL,** o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag. Mit 640 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. IV + 281 S. Geb. 8 M.

Nach dem Tode von Wittenbauer gibt Th. Pöschl die bekannte Aufgabensammlung in fünfter, in Einzelheiten umgearbeiteter Auflage heraus. Der vorliegende erste Band enthält die Aufgaben über Gleichgewicht und Bewegung im Rahmen der elementaren Mechanik. Die Verbesserungen, die vorgenommen wurden, namentlich die Ausschaltung vieler unzutreffender Beispiele, sind sehr anerkennenswert. Der Referent würde in dieser Richtung freilich noch wesentlich weiter gegangen sein.

Mises. 456

NACHRICHTEN

Felix Klein †. Am 22. Juni d. Js. ist Geheimrat Felix Klein in Göttingen im Alter von 76 Jahren verschieden. Mit ihm findet eine Epoche in der Entwicklung der Mathematik des 19. Jahrhunderts ihren Abschluß. Es ist hier nicht der Ort dafür, Sinn und Bedeutung dieser Epoche für die reine Mathematik zu würdigen. Wie schon in dem Aufsatz, der vor etwa einem Jahr aus Anlaß des 75. Geburtstages Kleins hier erschienen ist, hervorgehoben wurde, ist der jetzt Verstorbene für uns vor allem dadurch von Bedeutung geworden, daß er bewußt und erfolgreich in die Wechselbeziehungen zwischen reiner und angewandter Mathematik eingegriffen hat. Es war eines der ihm wichtigsten Lebensziele, das Felix Klein gerade in seinen reifsten Jahren energisch verfolgt hat, die mathematische Forschung mit den Forderungen, die die Anwendungen der Mathematik auf anderen Wissensgebieten stellen, in engeren Einklang zu bringen. Kein anderer hat ähnlich wie er in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts dem Standpunkt des Ingenieurs innerhalb der allgemeinen Wissenschaftsentwicklung Geltung und Ansehen zu verschaffen gewußt. Nicht alles, was Klein in dieser Richtung angestrebt hat, ja vielleicht sogar im Verhältnis zu dem Gewollten recht wenig, hat er erreichen können. Auch heute noch spielt die angewandte Mathematik nach der Zahl ihrer Vertreter und nach dem Raum, den sie innerhalb der mathematischen Wissenschaft einnimmt, die Rolle eines Stiefkindes. Immerhin ist äußerlich und innerlich in den letzten Jahrzehnten unter der Nachwirkung von Kleins weit vorausblickenden Anregungen mancher Fortschritt zu verzeichnen gewesen, von dem auch Klein selbst noch mit Freude und Genugtuung Kenntnis genommen hat. Es mag hier die Gelegenheit benutzt werden, ein Schreiben, das Felix Klein aus Anlaß der Begründung unserer Zeitschrift an den damaligen Direktor des Vereines deutscher Ingenieure gerichtet hat, zu veröffentlichen[1]). In einem Privatbrief an den Herausgeber schreibt Felix Klein zu gleicher Zeit u. a.: »Ihre Zeitschrift realisiert in der Tat ganz, was ich einst anstrebte, aber nach Lage der Sache nicht mehr durch eigene Produktion, sondern nur mehr organisatorisch vorbereiten konnte. Es ist mir namentlich auch eine Befriedigung, daß die vielfachen Ansätze, die in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften gemacht sind und fast unbeachtet zu bleiben schienen, jetzt zur Wirkung kommen.« Das folgende Schreiben zeigt, welch lebendigen Anteil der damals fast 72jährige gerade an den Aufgaben und Zielen der Ingenieur-Mathematik genommen hat.

Göttingen, Ende Februar 1921.

An den
Direktor des Vereines deutscher Ingenieure
Hrn. D. Meyer.

Sie haben mich freundlichst gebeten, der neuen Zeitschrift ein Geleitwort mit auf den Weg zu geben. Ich komme dieser Aufforderung gerne nach, denn es ist mir eine Genugtuung und eine besondere Freude, daß sich die Ingenieure und die Mathematiker zusammengefunden haben. Zu den Einzelausführungen, wie sie Hr. v. Mises in seinem Vorworte gibt, wüßte ich nichts Besonderes hinzuzufügen. Wohl aber möchte ich — zweifellos in voller Uebereinstimmung mit dem Herrn Herausgeber — noch ein Allgemeines hervorheben. Wenn man die Darstellungen auch hervorragendster Autoren vergleicht, findet man als Aufgabe der mathematischen Naturwissenschaft meistens nur angegeben, bei gegebenen Prämissen den weiteren Verlauf der Erscheinungen den Naturgesetzen entsprechend zu bestimmen, sagen wir die Bahn eines Geschosses, welches mit bestimmter Geschwindigkeit in bestimmter Richtung geschleudert wird, oder auch den Verlauf eines Lichtstrahles, der ein gegebenes optisches Instrument durchsetzt. Aber es gibt eine darüber hinausgehende Problemstellung, die gleicherweise der mathematischen Ueberlegung unterliegt: das Geschoß soll so geschleudert werden, daß es ein bestimmtes Ziel erreicht, das Instrument so konstruiert werden, daß die mit seiner Hilfe zustande kommende Abbildung eine möglichst vollkommene ist. Also neben die kausale Erklärung bei gegebenen Daten tritt die Forderung geeigneter Festlegung der Anfangsbedingungen nach dem Gesichtspunkte größter Zweckmäßigkeit. Es scheint mir, daß hiermit eine besondere Aufgabe aller Angewandten Mathematik bezeichnet ist, eine Aufgabe zudem, die der Denkweise und der Berufstätigkeit des schaffenden Ingenieurs besonders nahe liegt. Um in der Sprache unserer Pädagogen zu reden: es ist recht eigentlich funktionales Denken, welches hier verlangt wird: der volle Ueberblick über den Zusammenhang der Ergebnisse mit den jeweiligen Daten der Aufgabe.

Wenn sich Ihre Zeitschrift auch der so umrissenen Fragestellung nachdrücklich widmen möchte, wird sie, wie ich meine, den Interessen der Allgemeinheit in besonderer Weise dienen. Man spricht so viel davon, daß für den Wiederaufbau unseres gebeugten Vaterlandes die Aufrechterhaltung und Weiterentwicklung der Wissenschaft eine überaus wichtige Sache sei, und Jedermann denkt dabei mit an die ausschlaggebende Hilfe, welche von da aus der Qualitätsleistung unserer Industrie zuteil werden soll. Dieser Gedanke, den ich mit ganzer Seele stütze, möge durch die vorgehenden Zeilen nach bestimmter Richtung mehr präzisiert sein, als gewöhnlich geschieht. Das Ziel der theoretischen Naturwissenschaft soll nicht nur ein passives Verstehen, sondern eine aktive Beherrschung der Natur sein. Diese Formulierung tritt selbstverständlich nicht in Gegensatz zu den ethischen Forderungen, welche von anderen Seiten an die Wiedergeburt unserer Leistungsfähigkeit gestellt werden. Sondern sie will nur in Verbindung mit die-

[1]) Zuerst abgedr. VDI-Ztschr. 65 (1921), S. 332.

sen Forderungen gelten und die besondere Verpflichtung kennzeichnen, die uns Theoretikern innerhalb der Gesamtaufgabe zukommt.

Ganz ergebenst der Ihrige
Klein. 550

H. Reißner. An Stelle des kürzlich verstorbenen Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Müller-Breslau ist Herr Prof. H. Reißner von der Technischen Hochschule in Charlottenburg in die Reihe der unserer Zeitschrift enger verbundenen ständigen Mitarbeiter eingetreten, deren Namen wir laufend auf dem Titelblatt der Hefte führen. 550

Jahresversammlung in Danzig 12. bis 15. September 1925. Die diesjährige Hauptversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik findet gemäß dem in Innsbruck gefaßten Beschluß in Danzig gemeinsam mit der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung, der Deutschen Gesellschaft für technische Physik und der Deutschen physikalischen Gesellschaft statt. Das Programm, das in besonderen Abdrücken den Mitgliedern zugeht, wird sich in der Hauptsache wie folgt gestalten:

Sonnabend, den 12. September, vormittags 10 h: Eröffnung der Mathematikertagung (gemeinsam mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung).

Sonntag, den 13. September, vormittags: Freie Besichtigung der Stadt. Nachmittags: Dampferfahrt vom grünen Tor in Danzig durch die Weichsel nach Zoppot. 8 Uhr abends: Bewirtung durch die Stadt Zoppot auf der Kurhausterrasse.

Montag, den 14. September, vormittags 9³⁰ und nachmittags 3³⁰ h: Wissenschaftliche Sitzungen. Vorträge:

1. R. Mehmke, Stuttgart, Neue Mechanismen zur Erzeugung affiner Figuren.
2. H. Reissner, Charlottenburg, Energiekriterien der Knicksicherheit.
3. W. Spannhake, Karlsruhe, Thema aus der Turbinentheorie.
4. H. Föttinger, Charlottenburg, Fortbildung des Turbinenprinzips.
5. F. Eisner, Berlin, Druckmessungen an umströmten Zylindern.
6. F. Schleicher, Karlsruhe, Die Energiegrenze der Elastizität (Plastizitätsbedingung).
7. H. Krey, Berlin, Ueber die Grenzen der Uebertragbarkeit der Versuchsergebnisse und Modellähnlichkeit bei praktischen Flußbauversuchen.
8. F. Wolf, Danzig, Ueber eine Methode zur angenäherten numerischen Lösung des zweiten Randwertproblems der harmonischen Differentialgleichung.

Montag nachmittags 6³⁰ h: Geschäftssitzung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Dienstag, den 15. September, vormittags 9 h: Gemeinsame Sitzung mit der Deutschen Gesellschaft für technische Physik. Vorträge:

1. H. Lorenz, Danzig, Problem der Turbulenz.
2. W. Hort, Berlin, Die Festigkeit der Turbinenkonstruktionen vom physikalischen Standpunkt.

Hieran anschließend mehrere Vorträge aus dem Gebiet der elektrischen Schwingungen.

Es wird um möglichst baldige Anmeldung zur Teilnahme an den Geschäftsführer: Prof. R. v. Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43 gebeten. Auch Vortragsanmeldungen sind an diesen zu richten.

Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen. Am 16. Juli ist in Göttingen in Gegenwart des Präsidenten der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Exzellenz v. Harnack, sowie von Vertretern der Preußischen Staatsregierung und der Göttinger Universität das neue »Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung« eingeweiht worden, das mit der »Aerodynamischen Versuchsanstalt« in organischem Zusammenhang steht und auf dem Grundstück neben dieser errichtet ist. Professor Prandtl, der Leiter des neuen Instituts, schilderte in seiner Festrede zunächst die Entstehung des Instituts, die gleich der so vieler anderer Göttinger Institute in letzter Linie auf Felix Klein zurückgeht. Das Projekt für das Forschungsinstitut stammt bereits aus dem Jahre 1912, konnte aber infolge der Zeitverhältnisse bisher nicht verwirklicht werden. Es ist hoch anzuerkennen, daß sich, als es galt, Professor Prandtl, der einen Ruf nach München hatte, in Göttingen zu halten, trotz der ungemein schwierigen Lage des Reiches und der Wirtschaft in der schweren Zeit der Stabilisierung, die Reichsverwaltung und ein privater Gönner bereit gefunden haben, die Mittel zu dem Neubau und dessen Einrichtung zu gewähren. In dem zweiten Teil seiner Rede behandelte Prof. Prandtl die Aufgaben des Instituts, die sich unter dem Stichwort »systematische Untersuchung aller Art von Strömungsvorgängen« zusammenfassen lassen. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei der Verfolgung der Strömungsvorgänge durch alle erreichbaren Reynoldsschen Zahlen hindurch, ferner dem Studium der Strömungen von zusammendrückbaren Medien und der Strömungen mit Kavitation gewidmet werden. Ferner sollen Einrichtungen für die Eichung von Düsen und anderen Mengenmessern geschaffen werden. Ein »rotierendes Zimmer« soll Gelegenheit zum Studium der Strömungen unter der Wirkung der Coriolis-Kräfte geben. — Die Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät hat im Anschluß an die Feier dem bereits erwähnten Gönner des Instituts, Herrn Generaldirektor Hoene, Berlin, den Doktortitel ehrenhalber verliehen. Nach der Feier fand eine Besichtigung des neuen Instituts und der Aerodynamischen Versuchsanstalt statt, bei der eine Reihe teils bekannter, teils neuerer Versuche gezeigt wurde. 555

Aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Dem eben erschienenen Bericht über die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1924 entnehmen wir die folgenden Mitteilungen, die für die technische Hydromechanik von Interesse sind:

Durchflußziffer von Düsen. (Bearbeiter Jakob und Erk.) Die Bestimmung der Durchflußziffer von Normaldüsen aus dem Druckabfall von glatten Rohren ist veröffentlicht[1]). Die Durchflußziffer ist in die Regeln für Leistungsversuche an Ventilatoren und Kompressoren aufgenommen, die der Verein deutscher Ingenieure neu herausgibt.

Absolute Zähigkeit von Flüssigkeiten. (Bearbeiter Erk.) Das Viskosimeter nach Couette weist zwei hintereinander geschaltete Kapillaren von gleichem Durchmesser und verschiedener Länge auf. Gemessen werden die Druckunterschiede an den Enden jeder Kapillare, die Menge der sie durchströmenden Flüssigkeit und die Zeit. Dann können die Störungen der Strömung an den Enden der Röhrchen eliminiert werden, die bei der Anwendung nur einer Kapillare eine unsichere Korrekturgröße bilden.

Zu dem Viskosimeter gehören drei Paar Kapillaren von 100 und 200 mm Länge und der lichten Weite 1,0 mm, 1,7 mm und 2,1 mm, die die Untersuchung eines sehr ausgedehnten Zähigkeitsbereiches ermöglichen. Bisher wurden Anilin und 5 Mineralöle zwischen 0 und 60° untersucht, deren Zähigkeit bei 20° zwischen 0,11 und 5,4 Poise ($cm^{-1}\ g\ s^{-1}$) liegt.

Ein zweiter Zähigkeitsmesser von gleicher Bauart ist in Vorbereitung, mit dem die Messungen auf höhere Temperaturen ausgedehnt werden sollen.

Normalflüssigkeiten für Zähigkeitsmesser[1]). (Bearbeiter Erk.) Die gebräuchlichen Zähigkeitsmesser (nach Engler, Ostwald usw.) werden meistens mit Wasser ($\eta_{20} = 0{,}01$) geeicht. Mit solchen Apparaten mißt man aber häufig Zähigkeiten, die tausendmal größer sind als die des Wassers. Es besteht daher das Bedürfnis nach geeigneten Eichflüssigkeiten, die größere Zähigkeit besitzen. Zunächst wurde Anilin vorgenommen. Es wurden zu verschiedener Zeit zwei Proben »Anilin aus Sulfat« von Kahlbaum bezogen und bald nach Empfang untersucht, sowie nach Destillation im Vakuum bei etwa 84°. Sämtliche Messungen ergaben innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Viskosimeters die gleichen Zähigkeitswerte.

[1]) Jakob und Erk, Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflußziffer von Normaldüsen. Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ing. Wes. Heft 267. 28 Seiten. Berlin, VDI-Verlag 1924. — Jakob und Erk, Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflußziffer von Normaldüsen. VDI-Zeitschr. 68, S. 681 (1924).

[2]) Erk, Zähigkeit und Strömungswiderstand von kalten Flüssigkeiten und Gasen. Zeitschr. f. d. ges. Kälteindustr. 31 (1924), S. 49, 73, 116.

Technische Zähigkeitsmesser. (Bearbeiter Erk.) Da die Technik immer mehr von empirischen Formeln zu den exakten Strömungsgleichungen der Hydrodynamik übergeht, macht sich das Bedürfnis nach Kenntnis der Zähigkeit im physikalischen Maß geltend. Für die Umrechnung der mit dem verbreiteten Englerschen Zähigkeitsmesser bestimmten Englergrade hat Ubbelohde Tafeln aufgestellt, die nachzuprüfen und zu berichtigen sich als notwendig erwies. Da alle Versuche einer theoretischen Behandlung dieser Aufgabe bisher an der Unübersichtlichkeit der Strömungsvorgänge im Englerapparat scheiterten[1]), wurde rein empirisch durch gleichzeitige Messungen von Englergraden und absoluten Zähigkeiten eine Umrechnungskurve aufgenommen und zugleich untersucht, innerhalb welcher Grenzen die Verwendung des Englerapparates als Zähigkeitsmesser zulässig ist. Die Arbeiten sind noch nicht abgeschlossen.

Ein von H. Vogel konstruierter Zähigkeitsmesser wurde von den Oelwerken Stern-Sonneborn A.-G. in Hamburg eingereicht. Der Apparat besteht aus einer Kapillare mit Erweiterung und Durchflußmarken, sowie einem Aufnahmegefäß für die ausfließende Versuchsflüssigkeit, bei dem ein Ueberlauf selbsttätig den Strömungsdruck konstant hält. Dadurch wird es ermöglicht, rasch und mit kleinen Mengen der Versuchsflüssigkeit die kinematische Zähigkeit und bei Verwendung eines einVZfachen Druckapparates auch die gewöhnliche Zähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur zu messen. Die Prüfung des Apparates erwies seine Brauchbarkeit; zur Erzielung einer größeren Gleichmäßigkeit der Temperatur wird das Bad noch umgeändert. 559

Bericht des ersten internationalen Kongresses für technische Mechanik in Delft. Soeben ist, herausgegeben von den Herren C. B. Biezeno und J. M. Burgers in einem schön ausgestatteten Bande, der ausführliche Sitzungsbericht des Delfter Kongresses erschienen. Er umfaßt auf rund 450 Quartseiten, die durch zahlreiche Abbildungen und Lichtdrucktafeln ergänzt werden, den Wortlaut oder zumindest eingehende Auszüge sämtlicher auf dem Kongresse gehaltener Vorträge. Hierzu kommen kurze Protokolle aller Diskussionen und zahlreiche, von den Herausgebern hinzugefügte Bemerkungen. Auf den reichen Inhalt des Bandes wird noch später einzugehen sein. Das Buch ist zum Preise von holl. fl. 22,50 im Buchhandel zu erhalten. (Ersch. im Verlag: J. Waltman jr., Delft.)

[1]) Vergl. den inzwischen erschienenen Aufsatz von Kirsten und Schiller, diese Zeitschr. 5 (1925), S. 111 bis 114. Der Herausgeber.

(Redaktionsschluß 15. August 1925.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 52. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.